

**Nota:** A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o polinómio  $p(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ .
  - (a) Mostre que  $p(x) = 0$  tem uma única raiz real positiva,  $\alpha$  e determine um intervalo de amplitude inferior a um,  $I$ , que a contenha.
  - (b) Escolhendo uma aproximação inicial  $x^{(0)} \in I$  de forma adequada, mostre que o método de Newton, aplicado ao problema  $p(x) = 0$ , converge para a raiz  $\alpha$ .
  - (c) Calcule a segunda iteração do método de Newton e determine uma estimativa para o erro cometido.
2. Considere a equação algébrica  $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ .

- (a) Mostre que a equação anterior tem apenas uma raiz real positiva e determine um intervalo com amplitude inferior a um,  $I$ , que a contenha.
- (b) Considere o método iterativo definido por  $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$ , com

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}.$$

Mostre que, qualquer que seja a aproximação inicial  $x^{(0)} \in I$ , o método converge para a raiz anterior.

- (c) Determine o número de iterações que deverá efectuar com o método dado na alínea anterior por forma a obter uma aproximação para a raiz da equação com um erro que não exceda  $0,5 \times 10^{-3}$ .
3. A tabela a seguir mostra a distância de uma partícula relativamente a um ponto fixo, em função do tempo.

tempo $t$ (s)	0	1	2	3
distância $s$ (m)	1	1	0,294	0,122

- (a) Use o polinómio interpolador e os dados da tabela para estimar a velocidade da partícula,  $v = \frac{ds}{dt}$ , ao fim de 2,5 segundos.
  - (b) Sabendo que  $v(0) = 0$  e  $v(3) = -0,087$ , determine uma nova aproximação para  $v(2,5)$ , usando agora o polinómio interpolador de Hermite de grau mínimo.
4. A concentração de um medicamento no organismo de certo indivíduo ao fim de  $t$  horas é dada por  $C(t) = a + bt^2$ .

- (a) A partir dos seguintes dados experimentais

$t$ (horas)	0	1	2	3
$C$ (concentração)	10	7	5	1

obtenha  $a$  e  $b$  usando o método dos mínimos quadrados.

- (b) Estime a concentração do medicamento após 4 horas.
- (c) Sem efectuar qualquer cálculo numérico, mostre que recta de regressão passa pelo ponto cuja abcissa é a média dos  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , e cuja ordenada é a média dos  $C_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

---

## Formulário

---

**Método do ponto fixo** ( $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$ )

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Fórmula de erro para o ponto fixo**

$$|\alpha - x^{(k)}| \leq K^k \max\{x^{(0)} - a, b - x^{(0)}\}.$$

**Método de Newton** ( $f(x) = 0$ )

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Interpolador de Lagrange**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 0, \dots, n.$$

**Solução dos mínimos quadrados para  $Ax = b$**

$$A^T Ax = A^T b$$

---