

Nota: A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 1,01x + 0,99y = 2 \\ 0,99x + 1,01y = 2 \end{cases}$$

- (a) O que pode concluir acerca da convergência do método de Jacobi quando aplicado ao sistema anterior?
- (b) Considerando $x^{(0)} = [1, 2]^T$, calcule a segunda iteração do método de Jacobi aplicado ao problema anterior.
- (c) Diga quantas iterações deve efectuar no método de Jacobi por forma a que o factor de redução do erro absoluto, relativamente ao erro inicial, seja de 100 vezes.
2. Uma bola de naftalina exposta ao ar perde massa constantemente. Sabe-se que o raio r da bola diminui a uma taxa constante, isto é, $r(t) = r_0 - kt$, sendo t o tempo (em dias), r_0 o raio inicial (em centímetros) e k a constante de proporcionalidade. Suponha que a naftalina foi deixada ao ar livre às 12h do dia 1 de Julho e foram medidos os seguintes dados:

r (centímetros)	7	10	17	30	40
t (dias)	5,16	5,25	5,1	4,2	3,97

Faça o ajuste de mínimos quadrados à equação dada e determine uma estimativa para o raio inicial da bola e para o dia em que ela desaparecerá.

3. (a) Usando os círculos de Gershgorin, localize os valores próprios da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

e calcule um majorante para o seu raio espectral.

- (b) Aproxime o raio espectral de A usando o método da potência em segunda aproximação.
4. Considere a equação algébrica $3x^2 - e^x = 0$.
- (a) Mostre que a equação anterior tem apenas uma raiz real positiva e determine um intervalo com amplitude um, I , que a contenha.
- (b) Considere o método iterativo definido por $x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$, com

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{e^x}{3}}.$$

Mostre que, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in I$, o método converge para a raiz anterior.

- (c) Determine o número de iterações que deverá efectuar com o método dado na alínea anterior por forma a obter uma aproximação para a raiz da equação com um erro que não exceda $0,5 \times 10^{-3}$.

Formulário

Método do ponto fixo ($f(x) = 0 \Leftrightarrow x = g(x)$)

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Fórmula de erro para o ponto fixo

$$|\alpha - x^{(k)}| \leq K^k \max\{x^{(0)} - a, b - x^{(0)}\}.$$

Método de Newton ($f(x) = 0$)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Solução dos mínimos quadrados para $Ax = b$

$$A^T Ax = A^T b$$

Método de Jacobi ($Ax = b$)

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
