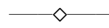


### Frequência de Matemática Computacional

29 de Maio de 2008



**Nota:** A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear  $Ax = b$  com  $A$  e  $b$  definidos por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 - \alpha & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 - \alpha \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

no qual  $\alpha$  é um escalar real diferente de  $-1$ .

- (a) Caracterize todos os valores de  $\alpha$  para os quais o método de Jacobi

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \text{sendo } A = D - L - U,$$

converge qualquer que seja o ponto inicial.

- (b) Considerando  $\alpha = 2$ , efectue duas iterações do referido método, indicando o erro cometido (a solução exacta é  $\bar{x} = [2, 1, 2]^T$ ).

2. Seja  $A$  a matriz definida por  $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , com inversa  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ .

- (a) Calcule os números de condição da matriz  $A$  associados à norma  $\|\cdot\|_1$  definida por

$$\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

- (b) Suponha que, ao resolver o sistema  $Ax = b$  por eliminação de Gauss, encontra uma solução  $\hat{x}$  que satisfaz  $\|A\hat{x} - b\|/\|b\| < 10^{-3}$ . Determine um majorante para o erro relativo de  $\hat{x}$ .

3. Considere a matriz  $B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 3 \end{bmatrix}$ .

Com base no teorema de Gershgorin obtenha um majorante para o maior módulo de um valor próprio de  $B$  e aproxime esse valor próprio efectuando duas iterações do método da potência.

4. Pretende resolver-se o problema de condição inicial

$$\begin{cases} y' = -3y + 99e^{-t}, & t \in [0, 1], \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

usando o método de Euler implícito  $u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1})$ .

- (a) Deduza a ordem e o erro de truncatura local do método numérico e conclua a sua convergência.  
(b) Obtenha o valor aproximado de  $y(1)$ , usando o referido método, com  $h = 0.5$ .