

**Nota:** A resolução completa das perguntas inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} -4x + y = 1 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

- Verifique que o sistema tem uma única solução.
- O que pode concluir acerca da convergência do método de Jacobi quando aplicado ao sistema anterior?
- Aproxime o raio espectral da matriz do método de Jacobi usando o método da potência em segunda aproximação, partindo do vector inicial  $x^{(0)} = [1/2, 1/2]^T$ . De que forma o resultado obtido confirma o que concluiu na alínea anterior?
- Considerando  $x^{(0)} = [1, 2]^T$ , calcule a segunda iteração do método de Jacobi aplicado ao problema anterior.
- Diga quantas iterações deve efectuar no método de Jacobi por forma a que o factor de redução do erro absoluto, relativamente ao erro inicial, seja de 100 vezes.

2. Considere os seguintes integrais

$$\int_0^1 x \, dx, \quad \int_0^1 (x^2 + 10x + 3) \, dx, \quad \int_0^1 \cos(\pi x) \, dx.$$

- Deduz a fórmula do ponto médio simples e o erro associado. Para quais dos integrais anteriores é esta fórmula exacta?
- Usando a fórmula de Simpson, determine um valor aproximado para os três integrais de tal forma que o erro absoluto cometido seja inferior a  $10^{-2}$ .

3. Considere a equação diferencial

$$y'(t) = t - y(t) - 3, \quad y(0) = 2.$$

- Aplice o método de Heun para determinar uma aproximação para  $y(1)$  com  $h < 1$ .
- Sabendo que a solução exacta do problema diferencial é  $y(t) = e^{-t} + \frac{t^2}{2} - 3t$ , indique qual é o erro relativo cometido na aproximação calculada na alínea anterior.
- Qual o intervalo de estabilidade absoluta deste método?

---

## Formulário

---

### Método de Jacobi ( $Ax = b$ )

$$A = D - L - U$$

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

### Fórmula do ponto médio

$$I_{PM}(f) = h\left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + \dots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\right].$$

$$E_{PM}(f) = \frac{h^2}{24}(b - a)f''(\xi), \quad \xi \in ]a, b[.$$

### Fórmula de Simpson

$$I_S(f) = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)], \quad n \text{ par.}$$

$$E_S(f) = -\frac{h^4}{180}(b - a)f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in ]a, b[.$$

### Método de Heun

$$k_1 = f(t_i, u_i); \quad k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1);$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2).$$

---