Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Matemática II
Engenharias Química e de Materiais

Exame de época normal 21/06/04

1ª parte

1- Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int x \ \operatorname{sen}(x^2) \ dx$; **b)** $\int \frac{1}{x(2-3\ln x)^{2/3}} dx$.

2- Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a) Se $a \geq 1$, então $\ln a \leq \int_1^a \frac{e^t}{t} dt$.

b) Se *f* é integrável em $[a, b]$, então *f* é contínua em $[a, b]$.

c) Se *f* é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(t)\,dt = 0$, então $f(x)=0$ para todo o $x \in [a,b]$.

3- Calcule:

a) $\int_0^1 e^x \operatorname{arctg}(e^x) \ dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{1}{e^t + e^{2t}} dt$.

4- Sejam *f* e *g* duas funções definidas por $f(x) = x^2 \int_0^x e^{-t}\, dt$ e $g(x) = e^{x^3} - 1$.

a) Determine $f'(x)$ e $g'(x)$.

b) Mostre que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

5- Considere a região do plano definida por $x^2 \leq y \leq x+2$. Calcule:

a) a respectiva área.

b) o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos *xx* da região anteriormente definida.

2ª Parte

6- Estude a natureza das seguintes séries:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n + \frac{2^{3n+1}}{5^{2n+3}}\right]$ **b)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+3^n}{2^n}$.

7- Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

a. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são séries divergentes, então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.

b. Se uma fonte radioactiva emitir, em cada ano, uma quantidade de radiação igual a 0.9 da quantidade emitida durante o ano anterior e se, num dado ano, a quantidade de radiação emitida foi de 2000 unidades Roetgen (Unidade Internacional dos Raios X), o total de radiações que irão ser emitidas pela fonte a partir desse ano é de 20 000 Roetgen.

c. Existe uma função $f: D \subseteq IR^2 \to IR$ tal que $f_x(x,y) = x + 4y$ e $f_y(x,y) = 3x - y$.

8- Desenvolva em série de potências de x a função

$$f(x) = \mathrm{sen}(x)$$

e determine o raio de convergência da série obtida.

9- Seja f uma função real definida em IR^2 por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + y^2}{x^2 - y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 2, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Determine o domínio de f.

b) Determine o domínio de continuidade de f.

c) Determine f_x e f_y, para $(x,y) \neq (0,0)$.

d) Usando a alínea anterior, determine a derivada direccional $D_u f(1,0)$, em que $u = (2,1)$.

10- As dimensões de uma caixa fechada rectangular foram medidas como 80cm, 60cm e 50cm, respectivamente, com erro máximo de 0.2cm em cada dimensão. Utilize diferenciais para estimar o erro máximo no cálculo da área da superfície da caixa.