Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra
Matemática II
Engenharias Química e de Materiais

Exame de época de recurso 15/07/04

1ª parte

1- Calcule as seguintes primitivas:

a) $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{1+2e^x}}\,dx$; **b)** $\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx$.

2- Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Existe uma função $g(x)$ tal que $g''(x)=x^2\ln x$, $g'(1)=\frac{8}{9}$ e $\lim_{x\to\infty} g(x)=1$.

b) Se *f* não é integrável em $[a,b]$, então *f* é descontínua num ponto $c\in\,]a,b[$.

c) Toda a função de derivada nula em $I=[a,b]\cup[c,d]$ é constante em *I*.

3- Calcule:

a) $\int_0^1 e^x \arcsin(e^x)\,dx$; **b)** $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x(5+\ln x)}\,dx$.

4- Considere a função *g* definida por $g(x)=\int_0^{x^3} e^{t^2}\,dt$, para $x\in IR$.

a) Determine $g'(x)$.

b) Calcule $g(0)$ e $g''(x)$.

c) Faça um esboço do gráfico de *g* a partir da informação obtida nas alíneas anteriores.

5- Considere a região do plano limitada pelas rectas $x=1, y=e$ pela curva $y=\ln x$.
Calcule:

a) a respectiva área.

b) o volume do sólido gerado pela rotação em torno do eixo dos *xx* da região anteriormente definida.

2ª parte

6- Estuda a natureza das seguintes séries:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{1}{3^n n^2}+\frac{2^{2n}}{3^n}\right]$; **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

7- Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

a) Se $a_n > 0$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, então $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

b) Se *a* é uma constante real positiva, então $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ é sempre divergente.

c) Se $D_u f(a,b) = 0$, então $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$, onde $f : IR^2 \to IR$, *u* um vector unitário e $(a,b) \in IR^2$.

8- Desenvolva em série de potências de *x* a função $f(x) = \cosh(x)$ e determine o raio de convergência da série obtida.

9- Seja *f* uma função real definida em IR^2 por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,y}{x^3+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 1, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Determine o domínio de *f*.
b) Determine o domínio de continuidade de *f*.
c) Determine f_x e f_y, para $(x,y) \neq (0,0)$.

10- A resistência total *R* de duas resistências R_1 e R_2 ligadas em paralelo é dada por

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}.$$

Se $R_1 = 100\Omega$ e $R_2 = 200\Omega$, diga se *R* é mais sensível a ΔR_1 ou a ΔR_2, sendo ΔR_i, i = 1,2, os erros cometidos na medição de R_i.