Departamento de Matemática da FCTUC

Mestrado em Matemática — Exame Normal **3 horas**

Simulação Numérica de Modelos — **17 de Junho de 2005**

1. Num problema diferencial autónomo
$$\begin{cases} y' &= f(y), \\ y(t_0) &= y_0, \end{cases}$$
a solução $y(t;t_0,y_0)$ verifica $y(t;t_0,y_0)=y(t-t_0;0,y_0)$. Assim, o fluxo do sistema diferencial, definido por $\varphi_t(y_0)=y(t;0,y_0)$, é tal que $\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s}$ e, em particular, $\varphi_0=\mathrm{id}$, $\varphi_t\circ\varphi_{-t}=\mathrm{id}$. Um método numérico pode ser visto como uma aplicação $\psi_h : y_0\mapsto y_1$ que aproxima φ_h. Temos que $\psi_0=\mathrm{id}$ e, além disso, podemos definir ψ_{-h} que, pelo teorema da função inversa, é invertível para h suficientemente pequeno.

   Um método diz-se simétrico se satisfaz $\psi_h\circ\psi_{-h}=\mathrm{id}$, ou, o que é equivalente, $\psi_h=\psi_{-h}^{-1}$. O método numérico definido por $\psi_h^*=\psi_{-h}^{-1}$ é chamado método adjunto de ψ_h.

   (a) Mostre que se $a_{s+1-i,s+1-j}+a_{ij}=b_j$, $i,j=1,...,s$, o método de Runge-Kutta de s etapas $\begin{array}{|c}A\\ \hline b^T\end{array}$ é simétrico.

   (b) Mostre que um método simétrico tem ordem par.

   (c) Mostre que $\psi_{h/2}\circ\psi^*_{h/2}$ e $\psi^*_{h/2}\circ\psi_{h/2}$ são métodos simétricos e conclua que o método de Störmer-Verlet é simétrico.

   Nota: O método de Störmer-Verlet aplicado ao problema $q''=f(q)$, com $q'=v$, conduz ao algoritmo seguinte:
$$v_{n+1/2}=v_n+\frac{h}{2}f(q_n);\quad q_{n+1}=q_n+hv_{n+1/2};\quad v_{n+1}=v_{n+1/2}+\frac{h}{2}f(q_{n+1}).$$

2. A transformada discreta de Fourier de uma sucessão M-periódica $\{y_k\}$ é a sucessão M-periódica $\{z_k\}$ definida por
$$z_k:=(\mathcal{F}_M y)_k=\sum_{\ell=0}^{M-1} y_\ell\omega^{k\ell},$$
com $\omega=e^{-2\pi i/M}$.

   (a) Mostre que a aplicação $\mathcal{F}_M$ é linear, bijectiva e que a sua inversa é dada por $\mathcal{F}_M^{-1}=\frac{1}{M}\overline{\mathcal{F}}_M$, onde
$$(\overline{\mathcal{F}}_M z)_k=\sum_{\ell=0}^{M-1} z_\ell\omega^{-k\ell}.$$

   (b) Dadas duas sucessões M-periódicas $\{y_k\}$ e $\{v_k\}$, define-se *convolução* como sendo a sucessão $y*v$ definida por
$$(y*v)_k=\sum_{\ell=0}^{M-1} y_{k-\ell}v_\ell.$$

      i. Mostre que a sucessão $y*v$ é M-periódica e que $\mathcal{F}_M(y*v)=\mathcal{F}_M y\mathcal{F}_M v$, onde a multiplicação de sucessões é efectuada elemento a elemento.

ii. Usando a convolução, diga como poderia calcular a solução do sistema linear

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{M-1} & a_{M-2} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{M-1} & \dots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M-1} & a_{M-2} & a_{M-3} & \dots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \end{bmatrix},$$

onde a matriz dos coeficientes é chamada de *Toeplitz circular*.

3. Consideremos o operador matricial $A^h \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$, que representa a discretização espacial de uma equação elíptica, dado por

$$A^h = \frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e ainda o operador completo de interpolação I_h^{2h} definido por $I_h^{2h} : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^{N/2-1}$ tal que $I_h^{2h}\mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}$ onde as componentes de $\mathbf{v}^{2h}$ dadas por

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \quad 1 \le j \le N/2 - 1$$

(a) Verifique que $I_h^{2h}\mathbf{w}_k^h = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^{2h}$, onde as componentes de $\mathbf{w}_k^h$ são os modos de Fourier associados ao operador A^h, dados por,

$$w_{k,j} = \text{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \le k < N/2$$

(b) Verifique ainda que

$$I_h^{2h}\mathbf{w}_{k'}^h = -\text{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^{2h}, \quad k' = N - k, \quad 1 \le k < N/2.$$

(c) Usando o resultados anteriores, determine, em função do vector $\mathbf{w}_k^{2h}$,

$$I_h^{2h}A^h\mathbf{w}_k^h \quad \text{e} \quad I_h^{2h}A^h\mathbf{w}_{k'}^h \quad \text{onde} \quad 1 \le k < N/2, \quad k' = N - k$$

4. Considere a equação de Burger $\qquad u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x = 0.$

(a) Determine a solução da equação de Burger com o dado inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

usando o método das características. Desenhe as características e os choques no plano x, t.

(b) Faça o mesmo da alínea (a) mas considerando o dado inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

(c) Diga, justificando convenientemente, qual dos problemas anteriores nos deu uma solução que é única.