

1. (a) Mostre que o conjunto das funções simplécticas $\psi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um grupo, isto é, mostre que:
- se ψ_1 e ψ_2 são simplécticas então também o é a composição $\psi_1 \circ \psi_2$;
 - se ψ é simpléctica então ψ^{-1} é simpléctica;
 - $\psi = \text{id}$ é simpléctica.
- (b) Seja $\psi_{\Delta t}(\cdot)$ um método simpléctico para toda a medida do passo $\Delta t \in \mathbb{R}$, quando aplicado a qualquer sistema Hamiltoniano $\dot{y} = J\nabla H(y)$. Usando a alínea anterior, mostre que
- o seu adjunto $\psi_{\Delta t}^*(\cdot)$ também é um método simpléctico;
 - para qualquer método simpléctico $\psi_{\Delta t}$ consistente, a composição

$$\hat{\psi}_{\Delta t} = \psi_{\Delta t/2}^* \circ \psi_{\Delta t/2}$$

é simpléctica e simétrica.

2. Se f é uma função definida em $L^2[0, L]$, os seus coeficientes de Fourier são dados por

$$\hat{f}_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \bar{\phi}_n(x), \quad \phi_n(x) = \exp(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{2\pi ni}{L}.$$

- (a) Supondo que f é uma continuamente diferenciável até à ordem $p \geq 2$, mostre que

$$|\hat{f}_n| \leq Cn^{-p}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- (b) Considere o problema

$$\partial_t u(x, t) = \mathcal{P}(\partial_x)u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sendo u^0 uma função em $L^2[0, L]$ e \mathcal{P} um operador diferencial polinomial. A solução pseudo-espectral deste problema é dada por

$$u_{\psi}^N(x, t) = \sum_{n=-N}^N \exp(\mu_n x) \tilde{u}_n^0 \phi_n(x),$$

com $\mu_n = \mathcal{P}(\lambda_n)$ e \tilde{u}^0 os coeficientes discretos de Fourier de u^0 numa rede com $M = 2N$ pontos.

- i. Considerando $\mathcal{P}(z) = z^2$, mostre que a determinação do M -vector $U(t)$ dos valores de rede de u_{ψ}^N passa pela resolução do sistema diferencial ordinário

$$\frac{d}{dt} \tilde{U}(t) = \Lambda \tilde{U}(t)$$

com $\tilde{U} = PF_M U$, sendo P uma matriz de permutação, F_M a matriz da transformada discreta de Fourier e Λ uma matriz diagonal.

- ii. Usando um procedimento semelhante ao definido em i., diga como poderia determinar a solução pseudo-espectral do problema

$$\partial_t u(x, t) = u_{xx}(x, t) - \sin(u(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Consideremos o operador matricial $A^h \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$, que representa a discretização espacial de uma equação elíptica, dado por

$$A^h = \frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e ainda o operador completo de interpolação I_h^{2h} definido por $I_h^{2h} : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N/2-1}$ tal que $I_h^{2h} \mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}$ onde as componentes de \mathbf{v}^{2h} dadas por

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \quad 1 \leq j \leq N/2 - 1$$

- (a) Verifique que $I_h^{2h} \mathbf{w}_k^h = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \mathbf{w}_k^{2h}$, onde as componentes de \mathbf{w}_k^h são os modos de Fourier associados ao operador A^h , dados por,

$$w_{k,j} = \text{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \leq k < N/2$$

- (b) Verifique ainda que

$$I_h^{2h} \mathbf{w}_{k'}^h = -\text{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \mathbf{w}_k^{2h}, \quad k' = N - k, \quad 1 \leq k < N/2.$$

- (c) Usando o resultados anteriores, determine, em função do vector \mathbf{w}_k^{2h} ,

$$I_h^{2h} A^h \mathbf{w}_k^h \quad \text{e} \quad I_h^{2h} A^h \mathbf{w}_{k'}^h \quad \text{onde} \quad 1 \leq k < N/2, \quad k' = N - k$$

4. Considere a equação de Burger $u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0$.

- (a) Determine a solução da equação de Burger com o dado inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

usando o método das características. Desenhe as características e os choques no plano x, t .

- (b) Faça o mesmo da alínea (a) mas considerando o dado inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

- (c) Diga, justificando convenientemente, qual dos problemas anteriores nos deu uma solução que é única.