

1. Considere o método de Runge-Kutta de s etapas $\left| \frac{A}{b^T} \right.$.

- (a) Mostre que se $b_i a_{i,j} + b_j a_{j,i} = b_i b_j$, $i, j = 1, \dots, s$, o método conserva invariantes quadráticos.
- (b) Mostre que não existem métodos de Runge-Kutta explícitos que conservem invariantes quadráticos.
- (c) Mostre que um método de Runge-Kutta diagonalmente implícito de s etapas satisfaz a relação dada na alínea (a) se e só se for equivalente à composição $\phi_{b_s h} \circ \dots \circ \phi_{b_1 h}$, sendo $y_{n+1} = \phi_h y_n$ o método do ponto médio implícito.

2. Se f é uma função definida em $L^2[0, L]$, os seus coeficientes de Fourier são dados por

$$\hat{f}_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) \bar{\phi}_n(x), \quad \phi_n(x) = \exp(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{2\pi n i}{L}.$$

- (a) Supondo que f é uma continuamente diferenciável até à ordem $p \geq 2$, mostre que

$$|\hat{f}_n| \leq C n^{-p},$$

com $C \in \mathbb{R}$.

- (b) Considere o problema

$$\partial_t u(x, t) = \mathcal{P}(\partial_x) u(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sendo u^0 uma função em $L^2[0, L]$ e $\mathcal{P}$ um operador diferencial polinomial. A solução pseudo-espectral deste problema é dada por

$$u_\psi^N(x, t) = \sum_{n=-N}^N \exp(\mu_n x) \tilde{u}_n^0 \phi_n(x),$$

com $\mu_n = \mathcal{P}(\lambda_n)$ e $\tilde{u}^0$ os coeficientes discretos de Fourier de u^0 numa rede com $M = 2N$ pontos.

- i. Considerando $\mathcal{P}(z) = z^2$, mostre que a determinação do M -vector $U(t)$ dos valores de rede de u_ψ^N passa pela resolução do sistema diferencial ordinário

$$\frac{d}{dt} \tilde{U}(t) = \Lambda \tilde{U}(t)$$

com $\tilde{U} = P F_M U$, sendo P uma matriz de permutação, F_M a matriz da transformada discreta de Fourier e Λ uma matriz diagonal.

- ii. Usando um procedimento semelhante ao definido em i., diga como poderia determinar a solução pseudo-espectral do problema

$$\partial_t u(x, t) = u_{xx}(x, t) - \sin(u(x, t)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Consideremos o operador matricial $A^h \in \mathbb{R}^{(N-1) \times (N-1)}$, que representa a discretização espacial de uma equação elíptica, dado por

$$A^h = \frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consideremos o operador completo de interpolação I_h^{2h} definido por $I_h^{2h} : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N/2-1}$ tal que $I_h^{2h} \mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}$, onde as componentes de $\mathbf{v}^{2h}$ são dadas por

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \quad 1 \leq j \leq N/2 - 1$$

e ainda o operador de interpolação linear definido por $I_{2h}^h : \mathbb{R}^{N/2-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ e tal que $I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h$ onde as componentes de $\mathbf{v}^h$ são dadas por

$$v_{2j}^h = v_j^{2h} \quad v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}), \quad 0 \leq j \leq N/2 - 1.$$

- (a) Verifique que $I_h^{2h} \mathbf{w}_k^h = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \mathbf{w}_k^{2h}$, onde as componentes de $\mathbf{w}_k^h$ são os modos de Fourier associados ao operador A^h , dados por,

$$w_{k,j} = \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \leq k < N/2$$

- (b) Verifique ainda que $I_h^{2h} \mathbf{w}_{k'}^h = -\sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \mathbf{w}_k^{2h}$, $k' = N - k$, $1 \leq k < N/2$.

- (c) Prove que $I_{2h}^h \mathbf{w}_k^{2h} = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \mathbf{w}_k^h - \sin^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right) \mathbf{w}_{k'}^h$, $k' = N - k$, $1 \leq k < N/2$.

- (d) Usando as alíneas anteriores determine $I_h^{2h} I_{2h}^h \mathbf{w}_k^{2h}$.

4. Determine a solução da equação de Burger

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

com o dado inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

Desenhe as características e os choques no plano $x-t$. (Note que os dois choques transformam-se num só choque em determinado ponto).