Departamento de Matemática da FCTUC

Mestrado em Matemática — Exame Recurso **3 horas**

Simulação Numérica de Modelos — **15 de Julho de 2006**

---

1. Considere o método de Runge-Kutta de s etapas $\begin{array}{|c} A \\ \hline b^T \end{array}$.

   (a) Mostre que se $b_i a_{i,j} + b_j a_{ji} = b_i b_j$, $i, j = 1, ..., s$, o método conserva invariantes quadráticos.

   (b) Mostre que não existem métodos de Runge-Kutta explícitos que conservem invariantes quadráticos.

   (c) Mostre que um método de Runge-Kutta diagonalmente implícito de s etapas satisfaz a relação dada na alínea (a) se e só se for equivalente à composição $\phi_{b_s h} \circ \cdots \circ \phi_{b_1 h}$, sendo $y_{n+1} = \phi_h y_n$ o método do ponto médio implícito.

2. Se f é uma função definida em $L^2[0, L]$, os seus coeficientes de Fourier são dados por

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\overline{\phi}_n(x), \qquad \phi_n(x) = \exp(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{2\pi n i}{L}.$$

   (a) Supondo que f é uma continuamente diferenciável até à ordem $p \geq 2$, mostre que

$$|\widehat{f}_n| \leq C n^{-p},$$

   com $C \in \mathbb{R}$.

   (b) Considere o problema

$$\partial_t u(x,t) = \mathcal{P}(\partial_x) u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

   com condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sendo u^0 uma função em $L^2[0, L]$ e $\mathcal{P}$ um operador diferencial polinomial. A solução pseudo-espectral deste problema é dada por

$$u_\psi^N(x,t) = \sum_{n=-N}^{N}{}'' \exp(\mu_n x) \tilde{u}_n^0 \phi_n(x),$$

   com $\mu_n = \mathcal{P}(\lambda_n)$ e $\tilde{u}^0$ os coeficientes discretos de Fourier de u^0 numa rede com $M = 2N$ pontos.

   i. Considerando $\mathcal{P}(z) = z^2$, mostre que a determinação do M-vector $U(t)$ dos valores de rede de u_ψ^N passa pela resolução do sistema diferencial ordinário

$$\frac{d}{dt}\tilde{U}(t) = \Lambda \tilde{U}(t)$$

   com $\tilde{U} = P F_M U$, sendo P uma matriz de permutação, F_M a matriz da transformada discreta de Fourier e Λ uma matriz diagonal.

   ii. Usando um procedimento semelhante ao definido em i., diga como poderia determinar a solução pseudo-espectral do problema

$$\partial_t u(x,t) = u_{xx}(x,t) - \sin(u(x,t)), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

   com condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Consideremos o operador matricial $A^h \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$, que representa a discretização espacial de uma equação elíptica, dado por

$$A^h = \frac{1}{2h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considere o operador de interpolação linear definido por $I_{2h}^h : \mathbb{R}^{N/2-1} \to \mathbb{R}^{N-1}$ tal que $I_{2h}^h \mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h$ onde as componentes de $\mathbf{v}^h$ são dadas por

$$v_{2j}^h = v_j^{2h} \qquad v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}), \quad 0 \le j \le N/2 - 1$$

(a) Mostre que os modos complementares $\{\mathbf{w}_k^h, \mathbf{w}_{k'}^h\}$ estão relacionados por $w_{k',j}^h = (-1)^{j+1} w_{k,j}^h$, onde $k' = N - k, \quad 1 \le k < N/2$.

As componentes de $\mathbf{w}_k^h$ são os modos de Fourier associados ao operador A^h, dados por,

$$w_{k,j} = \operatorname{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \le k < N/2$$

(b) Verifique que $\quad I_{2h}^h \mathbf{w}_k^{2h} = c_k \mathbf{w}_k^h - s_k \mathbf{w}_{k'}^h, \quad k' = N - k, \quad 1 \le k < N/2$, onde $c_k = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$ e $s_k = \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)$.

(c) Usando os resultados anteriores, determine, em função do vector $\mathbf{w}_k^h$ e $\mathbf{w}_{k'}^h$, $\quad A^h I_{2h}^h \mathbf{w}_k^{2h}$.

4. Considere a equação de Burger $\qquad u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x = 0.$

(a) Prove que a solução da equação de Burger, calculada usando o método das características, com o dado inicial $u_0(x)$, é dada por $u(x,t)$.

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \qquad u(x,t) = \begin{cases} 1 & x < t \\ (1-x)/(1-t) & t \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

(b) Justifique porque razão a solução anterior é apenas válida para $t < 1$. **Sugestão**: Faça um desenho em (x,t) observando o valor de $u(x,t)$ em cada subconjunto do plano xt.

(c) Para $t \ge 1$, determine o choque. Observe para isso que a solução $u(x,t)$ à esquerda do choque é dada por $u_e = 1$ e à direita é $u_d = 0$. Justifique convenientemente esta afirmação.

(d) Determine a solução para $t \ge 1$ tomando em consideração o facto da alínea anterior.