Departamento de Matemática da FCTUC

Mestrado em Matemática Exame Recurso **3 horas**

Simulação Numérica de Modelos **18 de Julho de 2006**

---

1. (a) Mostre que o conjunto das funções simplécticas $\psi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um grupo, isto é, mostre que:
   i. se ψ_1 e ψ_2 são simplécticas então também o é a composição $\psi_1 \circ \psi_2$;
   (Nota: $\frac{\partial}{\partial y}(\psi_1 \circ \psi_2)(y) = \frac{\partial}{\partial y}\psi_1(z)|_{z=\psi_2(y)}\frac{\partial}{\partial y}\psi_2(y)$)
   ii. se ψ é simpléctica então ψ^{-1} é simpléctica;
   (Nota: $\frac{\partial}{\partial y}\psi^{-1}(y) = (\frac{\partial}{\partial y}\psi(z))^{-1}|_{z=\psi^{-1}(y)}$)
   iii. $\psi = \mathrm{id}$ é simpléctica.

   (b) Seja $\psi_{\Delta t}(\cdot)$ um método simpléctico para toda a medida do passo $\Delta t \in \mathbb{R}$, quando aplicado a qualquer sistema Hamiltoniano $\dot{y} = J\nabla H(y)$. Usando a alínea anterior, mostre que
   i. o seu adjunto $\psi^*_{\Delta t}(\cdot)$ também é um método simpéctico;
   ii. para qualquer método simpléctico $\psi_{\Delta t}$ consistente, a composição

   $$\hat{\psi}_{\Delta t} = \psi^*_{\Delta t/2} \circ \psi_{\Delta t/2}$$

   é simpléctica e simétrica.

2. Se f é uma função definida em $L^2[0, L]$, os seus coeficientes de Fourier são dados por

$$\widehat{f}_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\overline{\phi}_n(x), \qquad \phi_n(x) = \exp(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{2\pi n i}{L}.$$

   (a) Supondo que f é uma continuamente diferenciável até à ordem $p \geq 2$, mostre que

   $$|\widehat{f}_n| \leq Cn^{-p}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

   (b) Considere o problema

   $$\partial_t u(x,t) = \mathcal{P}(\partial_x)u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

   com condição inicial $u(x, 0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, sendo u^0 uma função em $L^2[0, L]$ e $\mathcal{P}$ um operador diferencial polinomial. A solução pseudo-espectral deste problema é dada por

   $$u^N_\psi(x,t) = \sum_{n=-N}^{N}{}'' \exp(\mu_n x)\tilde{u}^0_n \phi_n(x),$$

   com $\mu_n = \mathcal{P}(\lambda_n)$ e $\tilde{u}^0$ os coeficientes discretos de Fourier de u^0 numa rede com $M = 2N$ pontos.

   i. Considerando $\mathcal{P}(z) = z^2$, mostre que a determinação do M-vector $U(t)$ dos valores de rede de u^N_ψ passa pela resolução do sistema diferencial ordinário

   $$\frac{d}{dt}\tilde{U}(t) = \Lambda\tilde{U}(t)$$

   com $\tilde{U} = PF_M U$, sendo P uma matriz de permutação, F_M a matriz da transformada discreta de Fourier e Λ uma matriz diagonal.

ii. Usando um procedimento semelhante ao definido em i., diga como poderia determinar a solução pseudo-espectral do problema

$$\partial_t u(x,t) = u_{xx}(x,t) - \sin(u(x,t)), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com condição inicial $u(x,0) = u^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Consideremos o operador matricial $A^h \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$, que representa a discretização espacial de uma equação elíptica, dado por

$$A^h = \frac{1}{2h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consideremos o operador completo de interpolação I_h^{2h} definido por $I_h^{2h} : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^{N/2-1}$ tal que $I_h^{2h}\mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}$, onde as componentes de $\mathbf{v}^{2h}$ são dadas por

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \quad 1 \le j \le N/2-1$$

e ainda o operador de interpolação linear definido por $I_{2h}^h : \mathbb{R}^{N/2-1} \to \mathbb{R}^{N-1}$ e tal que $I_{2h}^h\mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h$ onde as componentes de $\mathbf{v}^h$ são dadas por

$$v_{2j}^h = v_j^{2h} \qquad\qquad v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}), \quad 0 \le j \le N/2-1.$$

(a) Verifique que $I_h^{2h}\mathbf{w}_k^h = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^{2h}$, onde as componentes de $\mathbf{w}_k^h$ são os modos de Fourier associados ao operador A^h, dados por,

$$w_{k,j} = \operatorname{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \le k < N/2$$

(b) Verifique ainda que $I_h^{2h}\mathbf{w}_{k'}^h = -\operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^{2h}, \quad k' = N-k, \quad 1 \le k < N/2.$

(c) Prove que $I_{2h}^h\mathbf{w}_k^{2h} = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^h - \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_{k'}^h, \quad k' = N-k, \quad 1 \le k < N/2.$

(d) Usando as alíneas anteriores determine $I_h^{2h}I_{2h}^h\mathbf{w}_k^{2h}$.

4. Considere a lei de conservação

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

com a condição inicial $u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

(a) Sabendo que as curvas características $(x(t),t)$ deste problema verificam

$$x'(t) = f'(u(x(t),t)), \quad t > 0 \qquad x(0) = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

prove que $x'(t) = f'(u_0(a))$.

(b) Sejam $f(u) = \dfrac{u^2}{u^2 + \frac{1}{2}(1-u)^2}$ e $u_0(x) = \begin{cases} 1/2 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

i. Determine as curvas características.

ii. Verifique se a condição de entropia é satisfeita.

iii. Determine a solução fraca do problema.