Departamento de Matemática da FCTUC

Mestrado em Matemática — Exame de Recurso **3 horas**

Simulação Numérica de Modelos — **20 de Julho de 2007**

1. (a) Mostre que o conjunto das funções simplécticas $\psi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é um grupo, isto é, mostre que:

   i. se ψ_1 e ψ_2 são simplécticas então também o é a composição $\psi_1 \circ \psi_2$;
   (Nota: $\frac{\partial}{\partial y}(\psi_1 \circ \psi_2)(y) = \frac{\partial}{\partial y}\psi_1(z)|_{z=\psi_2(y)} \frac{\partial}{\partial y}\psi_2(y)$)

   ii. se ψ é simpléctica então ψ^{-1} é simpléctica;
   (Nota: $\frac{\partial}{\partial y}\psi^{-1}(y) = (\frac{\partial}{\partial y}\psi(z))^{-1}|_{z=\psi^{-1}(y)}$)

   iii. $\psi = \mathrm{id}$ é simpléctica.

   (b) Seja $\psi_{\Delta t}(\cdot)$ um método simpléctico para toda a medida do passo $\Delta t \in \mathbb{R}$, quando aplicado a qualquer sistema Hamiltoniano $\dot{y} = J\nabla H(y)$. Usando a alínea anterior, mostre que

   i. o seu adjunto $\psi^*_{\Delta t}(\cdot)$ também é um método simpéctico;

   ii. para qualquer método simpléctico $\psi_{\Delta t}$ consistente, a composição

   $$\hat{\psi}_{\Delta t} = \psi^*_{\Delta t/2} \circ \psi_{\Delta t/2}$$

   é simpléctica e simétrica.

2. A transformada discreta de Fourier de uma sucessão M-periódica $\{y_k\}$ é a sucessão M-periódica $\{z_k\}$ definida por

$$z_k := (\mathcal{F}_M y)_k = \sum_{\ell=0}^{M-1} y_\ell \omega^{k\ell},$$

com $\omega = e^{-2\pi i/M}$.

   (a) Mostre que a aplicação $\mathcal{F}_M$ é linear, bijectiva e que a sua inversa é dada por $\mathcal{F}_M^{-1} = \frac{1}{M}\overline{\mathcal{F}}_M$, onde

   $$(\overline{\mathcal{F}}_M z)_k = \sum_{\ell=0}^{M-1} z_\ell \omega^{-k\ell}.$$

   (b) Dadas duas sucessões M-periódicas $\{y_k\}$ e $\{v_k\}$, define-se *convolução* como sendo a sucessão $y * v$ definida por

   $$(y * v)_k = \sum_{\ell=0}^{M-1} y_{k-\ell} v_\ell.$$

   i. Mostre que a sucessão $y * v$ é M-periódica e que $\mathcal{F}_M(y * v) = \mathcal{F}_M y \mathcal{F}_M v$, onde a multiplicação de sucessões é efectuada elemento a elemento.

   ii. Usando a convolução, diga como poderia calcular a solução do sistema linear

   $$\begin{bmatrix} a_0 & a_{M-1} & a_{M-2} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{M-1} & \cdots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M-1} & a_{M-2} & a_{M-3} & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{M-1} \end{bmatrix},$$

   onde a matriz dos coeficientes é chamada de *Toeplitz circular*.

3. Consideremos o operador matricial $A^h \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$, que representa a discretização espacial de uma equação elíptica, dado por

$$A^h = \frac{1}{2h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Consideremos o operador completo de interpolação I_h^{2h} definido por $I_h^{2h} : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}^{N/2-1}$ tal que $I_h^{2h}\mathbf{v}^h = \mathbf{v}^{2h}$, onde as componentes de $\mathbf{v}^{2h}$ são dadas por

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4}(v_{2j-1}^h + 2v_{2j}^h + v_{2j+1}^h), \quad 1 \le j \le N/2-1$$

e ainda o operador de interpolação linear definido por $I_{2h}^h : \mathbb{R}^{N/2-1} \to \mathbb{R}^{N-1}$ e tal que $I_{2h}^h\mathbf{v}^{2h} = \mathbf{v}^h$ onde as componentes de $\mathbf{v}^h$ são dadas por

$$v_{2j}^h = v_j^{2h} \qquad v_{2j+1}^h = \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}), \quad 0 \le j \le N/2-1.$$

(a) Verifique que $I_h^{2h}\mathbf{w}_k^h = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^{2h}$, onde as componentes de $\mathbf{w}_k^h$ são os modos de Fourier associados ao operador A^h, dados por,

$$w_{k,j} = \operatorname{sen}\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \le k < N/2$$

(b) Verifique ainda que $I_h^{2h}\mathbf{w}_{k'}^h = -\operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^{2h}, \quad k' = N-k, \quad 1 \le k < N/2.$

(c) Prove que os modos complementares estão relacionados da seguinte forma $\mathbf{w}_{k'}^h = (-1)^{j+1}\mathbf{w}_k^h$.

(d) Prove que $I_{2h}^h\mathbf{w}_k^{2h} = \cos^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_k^h - \operatorname{sen}^2\left(\frac{k\pi}{2N}\right)\mathbf{w}_{k'}^h, \quad k' = N-k, \quad 1 \le k < N/2.$

(e) Usando as alíneas anteriores determine o efeito do operador $TG = I - I_{2h}^h(A^{2h})^{-1}I_h^{2h}A^h$ nos modos $\mathbf{w}_k^h$ e $\mathbf{w}_{k'}^h$, para $1 \le k \le N/2, k' = N-k$. (Lembre-se que, se $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$ então $A^{-1}\mathbf{w} = \lambda^{-1}\mathbf{w}$)

4. Considere a equação de Burger $\quad u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}$ com o dado inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & x \ge 1 \end{cases}$$

i. Determine as características e desenhe-as no plano $x - t$.

ii. Determine a solução do problema de valor inicial e desenhe a solução para $t = 0, t = 1/2$ e $t = 1$.