

INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL*

ADÉRITO ARAÚJO†

Resumo. Al-Biruni (973-1050), um grande matemático árabe, já usava interpolação quadrática e é possível que tivesse tido imitadores e discípulos que o fizessem também. Mas foi só no séc. XVII que se efectuaram os primeiros estudos sistemáticos sobre esta matéria, nomeadamente sobre o cálculo das diferenças finitas [3].

Palavras chave. Interpolação, polinómio interpolador

Classificação AMS. 65D05

1. Intradição. Seja f uma função real definida num conjunto de pontos x_0, x_1, \dots, x_n . Pretende-se calcular o valor de $f(\bar{x})$, com $\bar{x} \neq x_i, i = 0, 1, \dots, n$.

Tal situação é muito frequente, por exemplo, no contexto das equações diferenciais. Quando se usam métodos numéricos para aproximar a solução de uma equação diferencial esta fica apenas conhecida num conjunto de pontos. A interpolação permite assim encontrar uma função que passa por esse conjunto de pontos e que pode funcionar como uma aproximação à solução da equação diferencial.

Em linhas gerais, o conceito de interpolação consiste em determinar uma função $G(x) = a_0\phi_0(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$, gerada por uma certa família de funções $\{\phi_k\}_{k=0}^n$, por forma a que $f(x_i) = G(x_i), i = 0, 1, \dots, n$. A função G nestas condições é designada por função interpoladora de f nos pontos de suporte (interpolação) x_0, x_1, \dots, x_n .

Nada nos garante que o problema da interpolação tenha sempre solução. Por exemplo, fazendo $\phi_0(x) = 1$ e $\phi_1(x) = x^2$, não existe nenhuma função $G(x) = a_0 + a_1x^2$ que passe nos pontos $(1, 1)$ e $(-1, 0)$.

2. Interpolação polinomial de Lagrange. Um caso particular de interpolação com grande importância devido ao grande número de aplicações é a interpolação polinomial. Neste caso as funções geradoras são, por exemplo, $\phi_k(x) = x^k, k = 0, 1, \dots, n$.

DEFINIÇÃO 2.1. *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$ e conhecida nos pontos da partição*

$$(2.1) \quad a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Um polinómio P que satisfaz

$$(2.2) \quad f(x_i) = P(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

é chamado polinómio interpolador (de Lagrange) de f nos pontos da partição dada.

Os polinómios interpoladores constituem meios de aproximação de funções muito usados. Além disso, as fórmulas desenvolvidas para a interpolação polinomial estão na base do desenvolvimento de muitos métodos numéricos para o cálculo de raízes de equações não lineares (método da secante, etc.), cálculo de integrais e derivadas, bem como a resolução de equações diferenciais.

2.1. Existência e unicidade. Fórmula de Lagrange. O próximo teorema estabelece a existência e unicidade do polinómio de grau inferior ou igual a n interpolador de uma função em $n + 1$ pontos distintos. Além disso, indica-nos um processo que permite a sua determinação.

TEOREMA 2.2 (Lagrange). *Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$ e conhecida nos pontos da partição (2.1). Existe um e um só polinómio P_n de grau menor ou igual a n interpolador de f nos pontos dados.*

Demonstração. Consideremos o polinómio P_n definido por

$$(2.3) \quad P_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_i(x),$$

*Este extracto foi retirado da sebenta de Análise Numérica do curso de Engenharia Mecânica.

†Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra (alma@mat.uc.pt).

em que

$$(2.4) \quad \ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Notemos que cada ℓ_i é um polinómio de grau n . Além disso

$$\ell_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

isto é $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$ onde $\delta_{i,j}$ representa o símbolo de Kronecker¹. Portanto a função P_n é um polinómio de grau menor ou igual a n que verifica as condições de interpolação (2.2), o que prova a existência de solução do problema em causa.

Para provar a unicidade, suponhamos que P_n e Q_n são dois polinómios de grau menor ou igual a n interpoladores de f nos pontos da partição dada. Então o polinómio $R_n(x) := P_n(x) - Q_n(x)$ anula-se, pelo menos, nos pontos x_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Como R_n é um polinómio de grau menor ou igual a n , ele só pode ter $n + 1$ zeros se for identicamente nulo. Assim sendo, $P_n(x) = Q_n(x)$, o que prova o pretendido. \square

As expressões (2.3) e (2.4) definem a fórmula de Lagrange para calcular o polinómio interpolador de f nos pontos (2.1).

2.2. Erro de interpolação. Por definição, o polinómio interpolador coincide com a função num dado conjunto de pontos de suporte. Interessa-nos saber, no entanto, se para os outros pontos do domínio da função, o polinómio interpolador constitui uma boa ou uma má aproximação para a função. Nesse sentido temos o seguinte teorema.

TEOREMA 2.3. *Seja P_n o polinómio de grau menor ou igual a n interpolador da função f nos pontos da partição (2.1). Se $f \in C^n([a, b])$ e se $f^{(n+1)}$ for contínua em (a, b) , então para cada $\bar{x} \in [a, b]$ existe $\xi = \xi(\bar{x}) \in (a, b)$ tal que*

$$(2.5) \quad e(\bar{x}) := f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(\bar{x}),$$

onde $w(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$.

Demonstração. Se $\bar{x} = x_i$, para algum i o resultado é, obviamente, válido. Se $\bar{x} \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$, definamos a função auxiliar

$$F(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{w(x)}{w(\bar{x})} (f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})).$$

Ora, como $F(x) = 0$ possui $n + 2$ raízes distintas em $[a, b]$, uma vez que $F(x_i) = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, e $F(\bar{x}) = 0$, temos, por aplicação do Teorema de Rolle, que $F'(x) = 0$ possui pelo menos $n + 1$ raízes distintas em (a, b) , $F''(x) = 0$ possui pelo menos n raízes distintas em (a, b) e, sucessivamente, $F^{(n+1)}(x) = 0$ possui pelo menos uma raiz em (a, b) . Seja ξ essa raiz. Uma vez que

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \frac{(n+1)!}{w(\bar{x})} (f(\bar{x}) - P_n(\bar{x})),$$

substituindo x por ξ obtém-se (2.5). \square

3. Interpolação bidimensional de Lagrange. Nesta secção vamos considerar a determinação de um polinómio de duas variáveis que seja interpolador de uma função conhecida num conjunto de pontos de \mathbb{R}^2 .

Seja $[a, b] \times [c, d]$ um subconjunto de \mathbb{R}^2 . No intervalo $[a, b]$ consideremos a partição

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

¹Leopold Kronecker (1823-1891), eminente matemático do século XIX, ficou célebre, entre outras coisas, por ter afirmado: 'Deus criou os números inteiros; o resto é obra do Homem.'

e, em $[c, d]$

$$c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_{m-1} < y_m = d.$$

As duas partições anteriores induzem em $[a, b] \times [c, d]$ o seguinte conjunto de pontos

$$(3.1) \quad \{(x_i, y_j), i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\},$$

a que chamamos rede rectangular.

Seja f uma função definida em $[a, b] \times [c, d]$ e suponhamos que f é conhecida nos pontos da rede rectangular (3.1). O nosso objectivo é determinar um polinómio de duas variáveis x e y ,

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{ij} x^i y^j, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

que verifique as condições de interpolação

$$(3.2) \quad P(x_i, y_j) = f(x_i, y_j), \quad i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m.$$

O número de condições de interpolação é $(n+1) \times (m+1)$ e portanto o polinómio em x e y que permite resolver o problema de interpolação poderá apresentar $(n+1) \times (m+1)$ coeficientes.

TEOREMA 3.1. *Seja f uma função definida no rectângulo $[a, b] \times [c, d]$ onde consideramos a rede rectangular (3.1). Dados $f(x_i, y_j), i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$, o único polinómio P de grau n em x e m em y que verifica (3.2) o polinómio interpolador de Lagrange bidimensional*

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f(x_i, y_j) \ell_i(x) \ell_j(y),$$

onde $\ell_i(x), i = 1, \dots, n$, e $\ell_j(y), j = 1, \dots, m$ são polinómios de Lagrange.

Demonstração. Definamos $\ell_{ij}(x, y) = \ell_i(x) \ell_j(y), i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m$. Estas funções verificam

$$\ell_{ij}(x_k, y_t) = \begin{cases} 1, & i = k \text{ e } j = t, \\ 0, & i \neq k \text{ ou } j \neq t. \end{cases}$$

Assim, concluímos imediatamente que o polinómio P satisfaz as condições de interpolação.

Falta apenas provar que esse polinómio é o único polinómio de grau n em x e m em y que resolve o problema de interpolação. Consideremos

$$Q(x, y) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{ij} x^i y^j$$

um polinómio de grau n em x e m em y que verifica as condições de interpolação. Fixemos y_t na partição de $[c, d]$ e consideremos o polinómio em x

$$Q(x, y_t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{ij} x^i y_t^j = \sum_{i=0}^n a_{it} x^i$$

em que $a_{it} = \sum_{j=0}^m q_{ij} y_t^j$. Atendendo às condições de interpolação, os coeficientes deste polinómio devem satisfazer a

$$\sum_{i=0}^n a_{it} x_k^i = f(x_k, y_t), \quad k = 0, \dots, n,$$

isto é, o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{0t} \\ a_{1t} \\ a_{2t} \\ \vdots \\ a_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0, y_t) \\ f(x_1, y_t) \\ f(x_2, y_t) \\ \vdots \\ f(x_n, y_t) \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que este sistema é possível e determinado, existe para cada t , uma única solução a_{it} , $i = 0, \dots, n$. Finalmente, para os coeficientes q_{ij} e para cada $i = 0, \dots, n$, temos o seguinte sistema

$$\sum_{j=0}^n q_{ij} y_t^j = a_{it}, \quad t = 0, \dots, m,$$

que é também um sistema possível e determinado. Provámos deste modo a unicidade do polinómio interpolador. \square

A título de exemplo, considere a função

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi^2}{180}xy\right), \quad (x, y) \in [0.4, 0.6] \times [0.4, 1],$$

cujo gráfico é dado na Figura 3.1. A Tabela 3 tem os valores da função anterior nos pontos (x, y) da rede rectangular $\{0.4, 0.5, 0.6\} \times \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$.

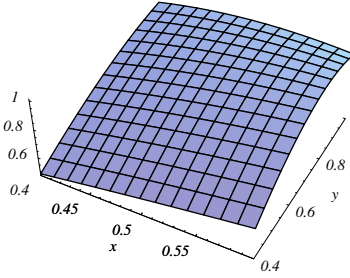


FIGURA 3.1. Função $f(x, y) = \sin\left(\frac{\pi^2}{180}xy\right)$, com $(x, y) \in [0.4, 0.6] \times [0.4, 1]$.

TABELA 3.1

Valores da função anterior nos pontos (x, y) da rede rectangular $\{0.4, 0.5, 0.6\} \times \{0.4, 0.6, 0.8, 1\}$

x_i	y_i	0.4	0.6	0.8	1
0.4		0.00877	0.01390	0.01754	0.02193
0.5		0.01096	0.01644	0.02193	0.02741
0.6		0.01315	0.01973	0.02631	0.03289

Como exercício:

1. Construa o polinómio interpolador de Lagrange de f nos pontos da rede.
2. Determine um valor aproximado para $f(0.5, 0.7)$ e compare o resultado obtido com o valor exacto.

Agradecimentos. O autor agradece a todos os que tiveram a paciência de ler este documento.

REFERÊNCIAS

- [1] R. L. BURDEN E J. D. FAIRES, *Numerical Analysis*, 4th ed., PWS-Kent, Boston, 1988.
- [2] B. J. CARAÇA, *Conceitos Fundamentais da Matemática*, Nona ed., Livraria Sá Costa, Lisboa, 1989.
- [3] H. Goldstine, *A History of Numerical Analysis from 16th Through the 19th Century*, Springer-Verlag, New York, 1977.