

PROBLEMA DE KEPLER (ou dos dois corpos)

O problema de Kepler descreve o movimento de dois corpos que se atraem mutuamente.

Questão 1: Mostre que, se escolhermos um dos corpos como o centro do sistema de coordenadas, o movimento permanece sempre no mesmo plano.

Questão 2: Prove que, denotando por $q = (q_1, q_2)$ a posição do segundo corpo, a Lei de Newton permite concluir, mediante uma conveniente normalização, que o movimento é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = J^{-1} \nabla H(p, q), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix},$$

onde a energia total do sistema (o Hamiltoniano) é

$$H(p, q) = H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (q_1^2 + q_2^2)^{-1/2}.$$

Questão 3: Determine a solução numérica do problema no intervalo $[0, T]$, e estude a conservação de invariantes, considerando

$$p_1(0) = 0, \quad p_2(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \quad q_1(0) = 1 - e, \quad q_2(0) = 0,$$

com $0 \leq e < 1$ a excentricidade (pode considerar $e = 0.6$) e $T = 100000 \times 2\pi$ (a solução tem período 2π).

SISTEMA SOLAR EXTERIOR

O sistema solar exterior tem sido muito estudado pelos astrónomos que pretendem saber o seu comportamento para um período de tempo de aproximadamente 100 milhões de anos.

Este problema é, de novo, um problema Hamiltoniano onde

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^5 m_i^{-1} p_i^T p_i - G \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^{i-1} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

Aqui p e q são supervectores compostos pelos vectores $p_i, q_i \in \mathbb{R}^3$.

As unidades escolhidas são:

- massas relativas ao sol, por forma a que a massa do sol seja 1; temos então $m_0 = 1.00000597682$ para ter em conta os planetas interiores;
- as distâncias são em UA (1 UA=149 597 879 km);
- o tempo em dias e a constante gravitacional é

$$G = 2.95912208286 \times 10^{-4}.$$

Vamos considerar o sol imóvel na origem e os dados para os restantes planetas são os dados na seguinte tabela referente ao dia 5 de Setembro de 1994 às 0h00.

| planeta | massa | pos. inic. | vel. inic |
|---------|-----------------------|--|--|
| Júpiter | 0.000954786104043 | -3.5023653 -3.8169847 -1.5507963 | 0.00565429 -0.00412490 -0.00190589 |
| Saturno | 0.000285583733151 | 9.0755314 -3.0458353 -1.6483708 | 0.00168318 0.00483525 0.00192462 |
| Urano | 0.0000437273164546 | 8.3101420 -16.2901086 -7.2521278 | 0.00354178 0.00137102 0.00055029 |
| Neptuno | 0.0000517759138449 | 11.4707666 -25.7294829 -10.8169456 | 0.00288930 0.00114527 0.00039677 |
| Plutão | $1/(1.3 \times 10^8)$ | -15.5387357 -25.2225594 -3.1902382 | 0.00276725 -0.00170702 -0.00136504 |

Questão 4: Determine a solução do problema para um período de 200 000 dias usando métodos com passo $h = 10$ dias.