DATA DE ENTREGA: 19 DE MARÇO DE 2007

O problema de Kepler descreve o movimento de dois corpos que se atraem mutuamente. Se escolhermos um dos corpos como o centro do sistema de coordenadas, é possível mostrar que o movimento permanece sempre no mesmo plano.

Questão 1: Prove que, denotando por $q = (q_1, q_2)$ a posição do segundo corpo, a Lei de Newton permite concluir, mediante uma conveniente normalização, que o movimento é dado por

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = J \nabla H(p, q), \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde a energia total do sistema (o Hamiltoniano) é $H(p, q) = H(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}}$.

Questão 2: Determine a solução exacta do problema de Kepler.

Questão 3: Determine a solução numérica do problema no intervalo $[0, T]$, considerando $p_1(0) = 0$, $p_2(0) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, $q_1(0) = 1 - e$, $q_2(0) = 0$, com $0 \leq e < 1$ a excentricidade (pode considerar $e = 0.2$) e $T = 100000 \times 2\pi$ (a solução tem período 2π).

O sistema solar exterior tem sido muito estudado pelos astrónomos que pretendem saber o seu comportamento para um período de tempo de aproximadamente 100 milhões de anos. Este problema é, de novo, um problema Hamiltoniano onde

$$H(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^5 m_i^{-1} p_i^T p_i - G \sum_{i=1}^5 \sum_{j=0}^{i-1} \frac{m_i m_j}{\|q_i - q_j\|}.$$

Aqui p e q são super-vectores compostos pelos vectores $p_i, q_i \in \mathbb{R}^3$. As unidades escolhidas são: massas relativas ao Sol (por forma a que a massa do Sol seja 1) mas, para ter em conta os planetas interiores, faz-se $m_0 = 1.00000597682$; distâncias em UA (1 UA=149 597 879 km); tempo em dias e a constante gravitacional é $G = 2.95912208286 \times 10^{-4}$. Considera-se o Sol imóvel na origem e os dados para os restantes planetas são os dados na seguinte tabela referente ao dia 5 de Setembro de 1994 às 0h00.

planeta	massa	pos. inic.	vel. inic
Júpiter	0.000954786104043	-3.5023653	0.00565429
		-3.8169847	-0.00412490
		-1.5507963	-0.00190589
Saturno	0.000285583733151	9.0755314	0.00168318
		-3.0458353	0.00483525
		-1.6483708	0.00192462
Urano	0.0000437273164546	8.3101420	0.00354178
		-16.2901086	0.00137102
		-7.2521278	0.00055029
Neptuno	0.0000517759138449	11.4707666	0.00288930
		-25.7294829	0.00114527
		-10.8169456	0.00039677
Plutão	1/(1.3 × 10 ⁸)	-15.5387357	0.00276725
		-25.2225594	-0.00170702
		-3.1902382	-0.00136504

Questão 4: Determine a solução do problema para um período de 200 000 dias usando métodos com passo $h = 10$ dias.