Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Simulação Numérica de Modelos

Ano de 2005/2006 | Trabalho 2

Data de Entrega: 10 de Abril de 2006

J. Scott Russell escreveu em 1844:

"I believe I shall best introduce this phenomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped – not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it skills rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminishes, and after a chase of one ore two miles I lost it in the windings of the channel."

Em 1895, Korteweg e de Vries formularam a equação

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{1}$$

que serve de modelo às observações de Russell. O termo uu_x descreve a forma da onda e o termo u_{xxx} a dispersão, isto é, ondas com diferentes comprimentos de onda propagam-se com velocidades diferentes. O compromisso entre estes dois termos permite a propagação da onda sem alteração de forma.

Questão 1: Mostre que a função (solitão)

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2}v\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{v}(x - vt - x_0)\right), \tag{2}$$

é solução de (1). Aqui $v > 0$ e x_0 são parâmetros arbitrários.

Questão 2: Obtenha a discretização pseudo-espectral da equação de Korteweg-de Vries (1).

Questão 3: Escreva um programa que resolva a equação usando a discretização obtida na questão anterior. Resolva o problema na região $-8 \le x \le 8$, usando condições de fronteira periódicas. Integre de $t = 0$ a $t = 2$, usando um integrador temporal adequado. Trace a solução em $t = 2$ para cada uma das condições iniciais seguintes e comente os resultados.

(a) Um único solitão da forma (2) com $v = 16$ e $x_0 = 0$.

(b) Um único solitão do tipo Gaussiano, por exemplo, $u(x,0) = -8\exp(-x^2)$.

(c) Dois solitões da forma $u(x,0) = -6\,\mathrm{sech}^2 x$.

(d) Uma solução inicial que tenha a forma de dois solitões da forma (2) com $v = 16$ e $v = 4$, ambos com $x_0 = 0$.

(e) O mesmo que anteriormente mas com $v = 16$ e $x_0 = 4$, $v = 4$ e $x_0 = -4$. Descreve o que acontece quando dois solitões se cruzam (amplitudes, velocidades), e depois de eles se cruzarem.