DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Matemática Numérica II

EXAME (2007/08)

11 DE JULHO DE 2008 DURAÇÃO: 2H30M

Nota: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II de 2007/2008 (com anotações feitas na aula).

1. Neste exercício pretende-se analisar a taxa quadrática de convergência local do método de Newton *inexacto*. Suponha que em vez de ser calculado o passo de Newton exacto é determinado um passo p_k tal que

$$J(x_k)p_k \; = \; -F(x_k) + e_k,$$

em que $e_k \in \mathbb{R}^n$ representa o erro residual. Prove, nas condições do Teorema 1 (Aula 3), que a sucessão $\{x_k\}$ converge quadraticamente para x_* se existir uma constante positiva c tal que

$$\|e_k\| \;\leq\; c\|F(x_k)\|^2 \qquad \text{para todo o } \; k.$$

2. Considere a fórmula de quadratura para integração em $[a, b]$ dada por

$$F_3(f) \;=\; \frac{b-a}{2}\left[f(a) + f(b)\right] + \frac{(b-a)^2}{12}\left[f'(a) - f'(b)\right],$$

conhecida por *fórmula trapezoidal corrigida*, cujo o erro para funções quatro vezes continuamente diferenciáveis em $[a, b]$ é dado por

$$I(f) - F_3(f) \;=\; f^{(4)}(\eta)(b-a)^5/720$$

com $\eta \in]a, b[$.

(a) Qual é o grau de exactidão desta fórmula? Qual é a sua ordem de precisão?

(b) Deduza um limite superior para o erro na forma Ch^5, em que $h = b - a$ e C é uma constante indendente de η.

(c) Tome a função $f(x) = x^3$ e $a = -1$ e $b = 1$. Mostre que o resultado da aplicação desta fórmula coincide com o da fórmula trapezoidal.

(d) Considere, agora, a função $f(x) = \text{sen}(x)$ e $a = 0$ e $b = \pi$. Que outras fórmulas conhecidas, para além da trapezoidal corrigida, é que aplicaria neste caso?

3. Dada uma função f, contínua em $[0,1]$, considere o seguinte problema de condições de fronteira:

$$\text{encontrar} \quad u \in C^2[0,1] \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} -u''(x) + u(x) \; = \; f(x) & \text{se } x \in (0,1), \\ u(0) \; = \; c_0 \qquad u(1) \; = \; c_1. \end{cases}$$

   (a) Deduza um problema variacional a partir deste problema. Considere, para o efeito, o mesmo espaço V para as funções teste que foi usado no caso em que $c_0 = c_1 = 0$.

   (b) Recorde a partição de $[0,1]$ dada por $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = 1$. Seja $\Psi_0(x)$ (resp. $\Psi_{n+1}(x)$) a função linear por troços em $[0,1]$ que vale 1 em $x_0 = 0$ e 0 nos restantes nodos (resp. 1 em $x_{n+1} = 1$ e 0 nos restantes nodos). Represente geometricamente estas duas funções.

   (c) Considere, agora, o conjunto das funções lineares por troços que valem c_0 em $x_0 = 0$ e c_1 em $x_{n+1} = 1$ e que pode ser escrito na forma

$$\{c_0\Psi_0 + c_1\Psi_{n+1}\} \; + \; L(\Psi_1, \ldots, \Psi_n),$$

   em que $L(\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ é o subespaço gerado por $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$. Em que situação é que este conjunto é um subespaço?

   (d) Escreva os elementos deste conjunto como combinação linear de $\Psi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_n$, Ψ_{n+1}, identificando os respectivos coeficientes.

   (e) Escreva o problema variacional $(\bar{V}_h)$ associado a esta discretização e, a partir deste, deduza um sistema de equações lineares. (Considere, para as funções teste, o mesmo subespaço V_h usado no caso em que $c_0 = c_1 = 0$.)

4. Considere o método$-\theta$ definido por

$$u_{k+1} = u_k + h((1-\theta)f(t_k, u_k) + \theta f(t_{k+1}, u_{k+1})), \quad u_0 = y_0, \quad k = 0, 1, ...,$$

   com $\theta \in [0,1]$, aplicado à resolução numérica do problema de condição inicial

$$y' = f(t, y(t)), \qquad t \in]t_0, t_0 + T], \qquad y(t_0) = y_0.$$

   (a) Determine, em função de θ, a ordem do método.

   (b) Mostre que o método é $\mathcal{A}$–estável se e só se $\theta \geq 1/2$.