

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Seja $S_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ a matriz $[\omega^{j \times k}]_{j,k=0}^{N-1}$, em que $\omega = e^{2\pi i/N}$ é a raiz primitiva da unidade de ordem N . Mostre que S_N é invertível e que a sua inversa é $\overline{S_N}/N$.

(b) Calcule a transformada de Fourier discreta de $y = (-1, -1, 1, 1)$, ($N = 4$).

2. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} u' &= f(t, u), & t \in (t_0, T) \subset \mathbb{R}, \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases} \quad (1)$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua na variável t e lipschitziana na variável u , e u_i a solução aproximada obtida pelo método dos trapézios ($u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}))$).

- (a) Supondo $f(t, u) = \lambda u$ e $|\lambda \frac{h}{2}| < 1$, mostre que $u_i = u_0 \left(\frac{1 + \lambda \frac{h}{2}}{1 - \lambda \frac{h}{2}} \right)^i$ e, consequentemente, que $\lim_{h \rightarrow 0} u_i = u_0 e^{\lambda(t_i - t_0)}$.

- (b) Prove que se $u \in C^3(\Omega)$ e $\|u^{(3)}\| \leq M$ então $\|u(t_i) - u_i\| \leq \frac{h^2 M}{12L} (e^{L(t_i - t_0)} - 1)$, sendo L a constante de Lipschitz de f .

3. Considere o problema de condição inicial (1) e o método dos trapézios modificado

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1})) + \frac{h^2}{12}(f'(t_i, u_i) - f'(t_{i+1}, u_{i+1})).$$

- (a) Mostre que o método tem ordem quatro.
- (b) Mostre que a região de estabilidade absoluta contém todo o semi-eixo real negativo do plano complexo.
- (c) Considerando $f(t, u) = -90u$, $t_0 = 0$ e $u_0 = 1$, determine uma solução aproximada para $u(1)$ usando ($h = 0.5$): i. o método dos trapézios modificado; ii. o método dos trapézios modificado como corrector e o método de Euler como predictor. Compare e justifique os resultados obtidos.
4. (a) Recorrendo à formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1+x)u = 0, \quad \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u'(1) = 0,$$

obtenha a solução aproximada de $u_2 \in \mathcal{P}_2(\Omega)$. Compare $u'(1)$ e $u'_2(1)$.

Sugestão: Use como funções tentativa-teste os polinómios $\psi_i(x) = x^i(1-x)$, $i = 1, 2$.

- (b) Obtenha a formulação variacional do problema anterior.