Departamento de Matemática da FCTUC

Exame de Análise Numérica II

9 de Janeiro de 2001 — Duração: 3 horas

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Determine a série de Fourier para a extensão periódica da função $u(x) = x$, com $x \in (-\pi, \pi)$ (função "folha de serrote"), indicando qual o valor da série em $x = \pi$?

   (b) i. Seja $S_N \in \mathbb{C}^{N\times N}$ a matriz $[\omega^{j\times k}]_{j,k=0}^{N-1}$, em que $\omega = e^{2\pi i/N}$ é a raiz primitiva da unidade de ordem N. Mostre que S_N é invertível e que a sua inversa é $\overline{S_N}/N$.

   ii. Calcule a transformada de Fourier discreta, com $N = 4$ pontos, correspondente à função "folha de serrote".

2. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} u' &= f(t,u), \qquad t \in (t_0, T) \subset \mathbb{R}, \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases} \tag{1}$$

onde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua na variável t e lipschitziana na variável u, e u_i a solução aproximada obtida pelo método

$$u_{i+2} + a_1 u_{i+1} + a_0 u_i = h(b_0 f(t_i, u_i) + b_1 f(t_{i+1}, u_{i+1})).$$

   (a) Determine a_0, b_0 e b_1, em função de a_1, por forma a que o método tenha ordem 2.

   (b) Para que valores de a_1 o método é estável-zero?

   (c) Pode a_1 ser escolhido por forma a obter um método convergente de ordem 3?

3. (a) Mostre que o método de Euler implícito ($u_{i+1} = u_i + hf(t_{i+1}, u_{i+1})$) é estável A.

   (b) A equação de Van der Pol

$$u'' - \mu(u^2 - 1)u' + u = 0, \quad \mu > 0,$$

   é um modelo para o fluxo de corrente num tudo de vácuo com três elementos internos. Seja $\mu = 0.5$ e $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Aproxime $u(1)$ e $u'(1)$ usando o método de Euler implícito, com medida do passo $h = 0.5$.

   Sugestão: Considere apenas uma iteração para o método iterativo que usar na determinação da solução da equação não linear.

4. (a) Obtenha a formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1 + x)u = x, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

   (b) Diga por que motivo as condições de fronteira de Neumann homogéneas são chamadas naturais.

   (c) Mostre que a forma bilinear obtida na alínea (a) é limitada e, atendendo à desigualdade de Friedrichs (para $v \in H^1(\Omega)$, $\|v\|_0^2 \le c\|v'\|_0^2$.), coerciva.

   (d) Formule o problema de Galerkin num espaço de funções polinomiais de dimensão dois, indicando quais as funções de base que lhe pareçam mais adequadas.