

---

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA DA FCTUC  
EXAME DE RECURSO DE ANÁLISE NUMÉRICA II

30 DE JANEIRO DE 2001

DURAÇÃO: 3 HORAS

---

**Observação:** A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Seja  $u \in C(\Omega)$  e  $u_n$  a sua melhor aproximação no subespaço  $\mathcal{P}_n(\Omega)$  dos polinómios de grau menor ou igual a  $n$  definidos em  $\Omega = [-1, 1]$ , relativamente ao produto interno  $(u, v) = \int_{\Omega} u(x)v(x) dx$ , com  $w(x) > 0$  em  $\Omega$ .

- (a) Considerando  $\{\phi_0, \dots, \phi_n\}$  uma base de  $\mathcal{P}_n(\Omega)$ , deduza o sistema de equações normais que lhe permite obter os coeficientes de  $u_n$  nessa base.
- (b) Mostre que a matriz do sistema estabelecido na alínea anterior é simétrica e não singular.
- (c) Deduza uma fórmula de recorrência para os polinómios de Chebyshev definidos por  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ ,  $n \geq 0$ . Refira-se depois às propriedades e interesse de tais polinómios no âmbito da teoria da aproximação.

2. Considere o método de Heun dado pelo quadro de Bucher  $\begin{array}{c|cc} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$ .

- (a) Determine a sua ordem de convergência.
- (b) Determine o seu intervalo de estabilidade absoluta.
- (c) Diga em que medida o resultado da alínea anterior pode condicionar a eficácia do método de Heun quando aplicado a problemas "stiff". Exemplifique com o problema de condição inicial  $u' = -100u$ ,  $u(0) = 1$ .

3. Considere o seguinte problema valores de fronteira (com derivadas parciais):

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = x. \end{cases}$$

- (a) Obtenha um sistema diferencial ordinário usando, na discretização das derivadas espaciais, diferenças finitas centradas de segunda ordem com uma malha uniforme (3 pontos).
- (b) Resolva o sistema diferencial obtido usando o método de Adams-Bashforth de 2 passos

$$u_{i+2} = u_{i+1} + \frac{h}{2}(3f(t_{i+1}, u_{i+1}) - f(t_i, u_i)),$$

com  $h = 0.5$  (calcule as primeiras aproximações pelo método de Heun).

4. Considere o problema

$$-u'' + (2 - \sin x)u = x^2, \quad x \in \Omega = (0, 1), \quad u(0) = u'(1) = 0.$$

- (a) Obtenha, justificando convenientemente, a sua formulação fraca simétrica.
- (b) Mostre que a forma bilinear obtida na alínea (a) é limitada.
- (c) Deduza o sistema linear que permite determinar a solução aproximada do problema no espaço gerado pelas funções teste  $\psi_i \in \mathcal{P}_2(\Omega)$ ,  $i = 1, 2$ , escolhidas da forma que ache mais conveniente.