Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

Primeira Frequência (2007/08)

8 de Abril de 2008 Duração: 1h30m

Nota: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II (com anotações feitas na aula).

1. Seja $F : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função continuamente diferenciável no conjunto aberto e convexo D, $x \in D$, e seja J a sua matriz Jacobiana, contínua à Lipschitz em D com constante γ.

   (a) Mostre que
   $$\|F(u) - F(v) - J(x)(u - v)\| \leq \frac{\gamma}{2}(\|u - x\| + \|v - x\|)\|v - u\|, \qquad \forall u, v \in D.$$

   (b) Prove que se $J(x)$ for invertível, então existem constantes $\epsilon > 0$ e $C > c > 0$ tais que
   $$c\|u - v\| \leq \|F(u) - F(v)\| \leq C\|u - v\|,$$
   para todo $u, v \in D$ tais que $\max\{\|v - u\|, \|u - x\|\} \leq \epsilon$.

2. Considere a função quadrática de n variáveis,
   $$f(x) = x^T Ax/2 + b^T x + c, \tag{1}$$
   com $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica, $b \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}$.

   (a) Prove que f possui um único minimizante local se e só se a matriz A for definida positiva.

   (b) Seja $n = 2$ e $f(x) = \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 2x_1x_2 - 3x_1 - x_2$. Escreva a função na forma matricial (1) e determine todos os seus pontos estacionários. Quais desses pontos são minimizantes locais e porquê?

3. Considere $I(f) = \int_0^1 f(x)dx$.

   (a) Determine A_0, A_1, B_0 e B_1 por forma a que a fórmula de quadratura
   $$I(f) \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0) + B_1 f'(1)$$
   tenha o maior grau de exactidão possível.

   (b) Considerando $f(x) = x^5 - Cx^4$, determine o valor da constante C que possibilita o cálculo exacto de $I(f)$ usando a fórmula trapezoidal. Mostre que se $C \in \left]\frac{15}{14}, \frac{85}{74}\right[$ a fórmula trapzoidal permite obter uma melhor aproximação para $I(f)$ que a fórmula de Simpson.

4. A altura (em metros) de água num reservatório, t horas depois de este ter começado a ser esvaziado, é dada pela função $h(t)$, de acordo com a seguinte tabela

Instante t_i	0	1	4	7	8	10	14
Altura de água $h(t_i)$	2.1	2.0	1.8	1.5	1.4	1.1	0

Suponha que a altura de água pode ser estimada pelo modelo

$$f(t) = \ln(a - bt), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Formule o problema dos mínimos quadrados que permite ajustar o modelo aos dados experimentais.

(b) Determine os parâmetros a e b usando o método de Gauss-Newton em primeira aproximação, tomando apenas os pontos da tabela $(0, 2.1)$, $(7, 1.5)$ e $(14, 0)$.

Nota: Considere a aproximação inicial $(a_0, b_0) = (8, 0.5)$ e use quatro casas decimais nos cálculos a efectuar.

(c) Diga se a direcção de Gauss-Newton obtida na alínea anterior é uma direcção de descida e determine a altura de água que o modelo calculado fornece, para $t = 5$ horas.