Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

Segunda Frequência (2007/08)

28 de Maio de 2008 — Duração: 1h30m

Nota: Justifique todas as suas respostas. Podem consultar-se os Apontamentos de Matemática Numérica II de 2007/2008 (com anotações feitas na aula).

1. Seja P_n um polinómio de grau n cujo coeficiente do termo de maior grau é igual à unidade. Mostre que o mínimo de

$$\|P_n\|^2 = \int_a^b P_n^2(x)\omega(x)dx, \qquad x \in [a,b],$$

é obtido para $P_n(x) = \phi_n(x)/a_n$, $x \in [a,b]$, onde $\{\phi_1, \ldots \phi_n\}$ é um conjunto de polinómios ortogonais em $[a,b]$ relativamente à função peso ω e a_n é o coeficiente do termo de maior grau de ϕ_n.

Sugestão: Considere $P_n(x) = \dfrac{\phi_n(x)}{a_n} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} c_j\phi_j(x)$.

2. Seja $F \in \mathbb{C}^{N\times N}$ a matriz $[\omega^{kj}]_{j,k=0}^{N-1}$, em que $\omega = e^{-2\pi i/N}$ é a raiz primitiva da unidade de ordem N. Mostre que F é invertível e que a sua inversa é $\overline{F}/N$.

3. Considere o problema

$$-u'' + (1+x)u = x, \qquad \Omega =]0,1[, \qquad u'(0) = u'(1) = 0.$$

(a) Obtenha a sua formulação variacional num enquadramento funcional adequado.

(b) Formule o problema de Galerkin num espaço de funções polinomiais de dimensão dois, indicando quais as funções de base que lhe pareçam convenientes.

(c) Formule o problema de Ritz e mostre que é equivalente ao problema estabelecido na alínea anterior.

4. Considere o problema de valor inicial definido por

$$y' = t^3y^2, \qquad y(0) = 0,$$

cuja solução se pretende aproximar pelo método de Taylor de ordem 2.

(a) Justifique o motivo pelo qual este problema tem uma e uma só solução no rectângulo $[-1,1]\times[-1,1]$.

(b) Deduza o erro de truncatura local do método e prove a sua consistência.

(c) Mostre que o método é convergente para a solução referida na alínea (a).