Departamento de Matemática da FCTUC

Segunda frequência de Análise Numérica II

19 de Dezembro de 2002 — Duração: 1h30m

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. Considerer preditor-corrector de Euler-Simpson

$$\text{Preditor:} \qquad u_{i+1} = u_i + hf_i, \quad \text{[Euler]};$$

$$\text{Corrector:} \qquad u_{i+2} - u_i = \tfrac{h}{3}(f_{i+2} + 4f_{i+1} + f_i), \quad \text{[Simpson]}.$$

   (a) Determine a sua ordem de consistência.

   (b) Prove que o método de Simpson é convergente?

2. Uma solução líquida flui de forma constante ao longo de um tubo na direcção x. Alguns dos solutos contidos na solução difundem-se através da parede do tubo reduzindo a concentração z no tubo. A concentração z é dada por

$$\frac{dz}{dx} = -z(0.2 + \sqrt{z})e^{-0.03x}.$$

   Se tomarmos $z = 1.5$ em $x = 2$ determine o valor de z em $x = 2.4$, com $h = 0.2$, usando o método preditor-corrector de Euler-Simpson.

3. (a) Obtenha a formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1 + \cos x)u = \sin x, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

   (b) Mostre que a forma bilinear obtida na alínea (a) é limitada e, atendendo à desigualdade de Friedrichs (para $v \in H^1(\Omega)$, $\|v\|_0^2 \leq c\|v'\|_0^2$.), coerciva.

   (c) Formule o problema de Galerkin num espaço de funções polinomiais de dimensão dois, indicando funções de base que lhe pareçam adequadas.

   (d) Diga, justificando convenientemente, se o problema de Galerkin dado na alínea anterior tem solução única.

4. No interior de uma conduta cilíndrica circula um fluído a alta temperatura. Visto que a pressão exercida pelo fluído é bastante elevada, as paredes da conduta não poderão ter uma espessura muito reduzida. Para esta situação, a equação diferencial que representa a temperatura u (em *graus Celsius*), na parede metálica em função da distância radial r (em *cm*) ao eixo do cilindro é

$$ru'' + u' = 0.$$

   Considerando uma conduta com raio interior de 1 *cm* e raio exterior de 2 *cm* determine um valor aproximado para $u\left(\frac{4}{3}\right)$ e para $u\left(\frac{5}{3}\right)$, supondo que a temperatura do fluído é de 540^oC e a temperatura da parede exterior é de 20^oC.

   Fórmulas de diferenças finitas:

$$\begin{aligned} u'(r_i) &= \frac{1}{2h}\left[u(r_{i+1}) - u(r_{i-1})\right] - \frac{h^2}{6}u'''(\xi_1), \quad \xi_1 \in (r_{i-1}, r_{i+1}); \\ u''(r_i) &= \frac{1}{h^2}\left[u(r_{i-1}) - 2u(r_i) + u(r_{i+1})\right] - \frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_2), \quad \xi_2 \in (r_{i-1}, r_{i+1}). \end{aligned}$$