Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica II

Ano de 2002/2003 — Ficha 2

Data de entrega: 24 de Outubro de 2002

1. (a) Mostre que a fórmula de Rodrigues para os polinómios de Legendre é dada por

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k, \qquad k \geq 1,$$

e daí conclua que

$$\alpha_k = \frac{(2k)!}{2^k (k!)^2}, \qquad k \geq 0,$$

e que

$$\|P_k\|^2 = \frac{2}{2k+1}, \qquad k \geq 0.$$

(b) Mostre que, para os polinómios de Lagrange, se tem (na fórmula de recorrência)

$$B_k = 0, \qquad A_k = \frac{2k+1}{k+1} \qquad \text{e} \qquad C_k = \frac{k}{k+1},$$

e daí conclua que

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1} x P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x).$$

2. Mostre que o polinómio mónico de Chebyshev de grau n é, de todos os polinómios mónicos de grau n em $[-1,1]$, o que tem menor norma.

3. Determine o valor $(a,b) \in IR^2$ que minimiza

$$J(a,b) = \int_{-\pi}^{\pi} (x - a - b\cos x)^2 dx.$$

4. Elabore um programa que faça a aproximação da função

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad x \in [-1,1],$$

e do conjunto de valores

x	y
10.00	0.42
10.20	0.48
10.40	0.51
10.60	0.52
10.80	0.53
11.00	0.55
11.20	0.58
11.40	0.61
11.60	0.65
11.80	0.74
11.89	0.91
11.96	1.29

x	y
12.00	1.52
12.04	1.87
12.08	2.35
12.12	2.89
12.16	3.40
12.20	3.83
12.28	4.27
12.36	4.53
12.44	4.62
12.50	4.64
13.00	4.64
14.00	4.64

,

usando a aproximação polinomial dos mínimos quadrados de grau conveniente. Trace os gráficos dos resultados obtidos.