Data de entrega: 7 de Novembro de 2002

1. (a) Prove o Lema de Gronwall.
"Seja $\{z_n\}_{n=0}^N$ uma sucessão de números positivos tais que $z_{n+1} \leq Cz_n + D$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, com C e D constantes e $C > 0$. Então, para todo o $n = 0, \ldots, N$,
$$z_n \leq \frac{D}{1-C}(1 - C^n) + z_0 C^n, \quad C \neq 1, \qquad \text{e} \qquad z_n \leq nD + z_0, \quad C = 1."$$
(b) Usando o resultado demonstrado na alínea anterior prove o método de Euler
$$u_{i+1} = u_i + hf(t_i, u_i)$$
é convergente.

2. Determine a ordem e o erro de truncatura local dos seguintes métodos:
(a) trapézios: $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}))$;
(b) Heun: $k_1 = f(t_i, u_i),\ k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1),\ u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}(k_1 + k_2)$

3. Elabore um programa que determine uma solução aproximada para o problema
$$y' = Ay, \quad t \in [0, 1], \qquad y(0) = [1, 0, 2]^T,$$
onde
$$A = \begin{bmatrix} 42.2 & 50.1 & -42.1 \\ -66.1 & -58 & 58.1 \\ 26.1 & 42.1 & -34 \end{bmatrix},$$
usando: (a) o método dos trapézios; (b) o método de Heun. Compare e comente os resultados obtidos sabendo que a solução exacta do problema é
$$y(t) = \begin{bmatrix} \exp(0.1t)\sin 8t + \exp(-50t) \\ \exp(0.1t)\cos 8t - \exp(-50t) \\ \exp(0.1t)(\sin 8t + \cos 8t) + \exp(-50t) \end{bmatrix}.$$