Data de entrega: 5 de Dezembro de 2002

1. Prove que, a partir do polinómio interpolador de Hermite se pode obter o método de passo múltiplo

$$u_{i+2} + 4u_{i+1} - 5u_i = h\left(4f_{i+1} + 2f_i\right).$$

Diga, justificando, se se trata de um método convergente.

2. Considere o problema de condição inicial

$$\begin{cases} u' &= f(t,u), \qquad t \in (t_0, T) \subset IR, \\ u(t_0) &= u_0, \end{cases}$$

onde $f : IR^2 \longrightarrow IR$ é contínua na variável t e lipschitziana na variável u, e u_i a solução aproximada obtida pelo método

$$u_{i+2} + a_1 u_{i+1} + a_0 u_i = h(b_0 f(t_i, u_i) + b_1 f(t_{i+1}, u_{i+1})).$$

(a) Determine a_0, b_0 e b_1, em função de a_1, por forma a que o método tenha ordem 2.

(b) Para que valores de a_1 o método é estável-zero?

(c) Pode a_1 ser escolhido por forma a obter um método convergente de ordem 3?

3. Considere o método

$$u_{i+2} - u_i = \frac{h}{2}(f_{i+1} + 3f_i).$$

Usando o critério de Schur, determine o seu intervalo de estabilidade absoluta.

4. Mostre que o método

$$u_{i+2} - u_{i+1} = \frac{h}{3}(3f(t_{i+1}, u_{i+1}) - 2f(t_i, u_i))$$

é inconsistente. Mostre o efeito da inconsistência quando se usa o método na integração numérica do problema de condição inicial

$$\begin{cases} u' &= 4t\sqrt{u}, \\ u(0) &= 1, \end{cases}$$

em $t = 2$, sabendo que a suloção exacta é $u(t) = (1 + t^2)^2$.

5. Considere o método

$$u_{i+2} - (1-a)u_{i+1} + au_i = \frac{h}{2}\left((3-a)f(t_{i+1}, u_{i+1}) - (1-a)f(t_i, u_i)\right).$$

Ilustre o efeito da estabilidade zero quando se usa o método com (i) $a = 0$, (ii) $a = -5$, no cálculo numérico da solução do problema de condição inicial dado no exercício anterior.