Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica II

Ano de 2002/2003 Ficha 6

Data de entrega: 19 de Dezembro de 2002

Elabore um programa, na linguagem de programação que preferir, para resolver um dos seguintes exercícios.

1. O problema da determinação da distribuição da temperatura num domínio Ω é dado, no caso estacionário, pela equação de Laplace
$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \qquad x \in \Omega.$$
Considere Ω um quadrado de lado de medida 12 cm dotado de um orifício quadrado (centrado) de lado 6 cm. As condições de fronteira são: a temperatura interior é de -1 grau e a temperatura exterior é $+1$ grau. Determine a temperatura entre as duas fronteiras usando o método das diferenças finitas numa rede uniforme de espaçamento 1 cm. Resolva o sistema linear pelo método dos gradientes conjugados.

2. Usando o método de Runge-Kutta-Fehlberg $RKF4(5)$, com um algoritmo de passo variável, determine uma solução aproximada do problema
$$u' = u - t^2 + 1, \qquad t \in (0, 2], \qquad u(0) = 0.5,$$
comparando-a com a solução exacta
$$u(t) = (t + 1)^2 - 0.5e^t.$$
Trace o gráfico da solução numérica usando splines cúbicos, resolvendo o sistema linear com um método directo apropriado.

3. Por forma a estabelecer a cota de 3 marcos, B, C e D, fizeram-se dois nivelamentos, $ABCDA$ e $ABDA$; foram registados os seguintes resultados (em metros) :

   nivelamento 1 : $dN_{AB} = +3.753$, $dN_{BC} = +5.548$, $dN_{CD} = +10.427$, $dN_{DA} = -19.721$;

   nivelamento 2 : $dN_{AC} = +9.280$, $dN_{CB} = -5.540$, $dN_{BA} = -3.755$;

   Usando o método dos mínimos quadrados, determine os valores mais prováveis para as cotas dos marcos sabendo que $N_A = 169.721$ metros.

4. Considere o problema de valor de fronteira
$$-u'' + \pi^2 u = 2\pi^2 \sin(\pi x), \qquad x \in (0, 1), \qquad u(0) = u(1) = 0.$$
Usando o método de Galerkin, determine uma solução aproximada para o problema no espaço de dimensão n=10 gerado:
   (a) pelas funções lineares segmentadas;
   (b) pelas funções *spline* cúbicas.

5. Usando o método das diferenças finitas numa malha uniforme de espaçamento $h = 0.1$, determine uma aproximação para a solução de:
   (a) o problema linear
$$u'' = -\frac{2}{x}u' + \frac{2}{x^2}u + \frac{\sin(\ln x)}{x^2}, \qquad x \in (1, 2), \qquad u(1) = 1, u(2) = 2;$$
   (b) o problema não linear
$$u'' = \frac{1}{8}(32 + 2x^3 - uu'), \qquad x \in (1, 3), \qquad u(1) = 17, u(2) = \frac{43}{3}.$$