Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

Trabalho 1 (2007/08)

Data de recepção: **26/02/2008** Data de entrega: **04/03/2008**

1. Considere a aplicação do método de Newton à resolução numérica da equação $f(x) = 0$. Mostre que:

   (a) se $f(x_*) = f'(x_*) = 0$, $f''(x_*) \neq 0$, o método de Newton converge linearmente para x_*;

   (b) se $f(x_*) = 0$, $f'(x_*) \neq 0$, $f''(x_*) = 0$, $f'''(x_*) \neq 0$, o método de Newton converge cubicamente para x_*.

2. Considere a função vectorial $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:
$$F(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} e^{x_1} - e^{x_2} \\ \frac{1}{3}x_2^3 \end{bmatrix}.$$
   Indique um valor para constante de Lipschitz da matriz Jacobiana de F no conjunto $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

3. Considere o sistema
$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 + x_2^2 + 10^{-3}x_1 \end{bmatrix} = 0.$$

   (a) Aproxime a solução usando o método de Newton, em Matlab, partindo do ponto $x_0 = [0.01 \quad 0.01]^\top$.

   (b) Explique o motivo pelo qual a convergência para a solução é lenta.

   (c) Como poderia contornar o problema?

4. Prove, nas condições do Teorema 1 e utilizando os seus resultados, que a sucessão $\{F(x_k)\}$ converge quadraticamente para o vector nulo.

5. Sejam u e v dois vectores de $\mathbb{R}^n$ e A uma matriz $n \times n$ não singular. Prove que $A + uv^\top$ é não singular se e só se
$$\sigma := 1 + v^\top A^{-1} u \neq 0.$$
   Mostre que a fórmula (de Sherman-Morrison-Woodbury) para a inversa de $A + uv^\top$ quando $\sigma \neq 0$ é:
$$\left(A + uv^\top\right)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{\sigma} A^{-1} uv^\top A^{-1}.$$