Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Matemática Numérica II

Trabalho 3 (2007/08)

Data de recepção: **15/04/2008** Data de entrega: **23/04/2008**

1. Copie, da página da disciplina para a sua área de trabalho, as `m-files` disponíveis para integração numérica de uma função real de duas variáveis reais.

   (a) Explique, detalhadamente, as instruções da função `integrar_2D`, identificando as fórmulas de quadratura e a forma como estão a ser aplicadas.

   (b) Implemente uma nova versão de `integrar_2D` substituindo as fórmulas de quadratura.

   (c) Teste ambas as versões para os exemplos incluídos em `funcao.m`.

2. Seja f uma função contínua em $[0,1]$. Considere a função real de $n+1$ variáveis reais dada por $g(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \int_0^1 \left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\right)^2 dx$, que descreve uma forma de medir o erro da aproximação de f, em $[0,1]$, por um polinómio de grau n.

   (a) Determine escalares $\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*$ de forma a que $\nabla g(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*) = 0$. (Estes escalares são a solução de um sistema de equações lineares. Não é necessário resolver o sistema.)

   (b) O que teria de provar para afirmar que $[\, \alpha_0^* \; \alpha_1^* \; \ldots \; \alpha_n^* \,]^\top$ é o (único) minimizante da função g?

   (c) A matriz deste sistema de equações lineares, conhecida por matriz de Hilbert, é extremamente mal-condicionada. Calcule, em Matlab e *numa só instrução*, o número de condição desta matriz quando $n = 9$. Verifique, em Matlab, que os seus valores próprios são todos positivos.

3. Prove as seguintes propriedades sobre os polinómios de Chebyshev:

   (a) $T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x),\ k \geq 1.$

   (b) $\|T_k(x)\|_\infty = 1,\ k \geq 0.$

   (c) $T_k(x)$ atinge o valor absoluto de 1 nos pontos $x_j = \cos(j\pi/k)$, $j = 0, \ldots, k$. Mais precisamente: $T_k(x_j) = (-1)^j$.

   (d) As raízes de T_k são $\cos[(2j-1)\pi/(2k)]$, para $j = 1, \ldots, k$.

   (e) O polinómio $T_k(x)$ é uma função par se k for par e uma função ímpar se k for ímpar.

   (f) O coeficiente de x^k em $T_k(x)$ é dado por $\alpha_k = 2^{k-1}$, $k \geq 1$.

   (g) Mostre que o polinómio $\widetilde{T}_k(x) = 2^{1-k} T_k(x)$ é, de todos os polinómios mónicos de grau menor ou igual a k em $[-1,1]$, o que tem menor norma.