

**Matemática Numérica II**

TRABALHO 4 (2007/08)

DATA DE RECEPÇÃO: **13/05/2008**

DATA DE ENTREGA: **21/05/2008**

---

Considere o seguinte problema de condições de fronteira

$$\text{encontrar } u \in C^2[0, 1] \text{ tal que } \begin{cases} -Tu''(x) + ku(x) = w(x) & \text{se } x \in ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (\text{P})$$

onde  $u$  representa o deslocamento vertical de uma viga unidimensional de comprimento 1, submetida a uma carga transversal de intensidade  $w$  por unidade de comprimento,  $T$  é a tensão e  $k$  um coeficiente associado à elasticidade da viga.

1. Obtenha a formulação variacional do problema (P).
2. Formule o problema de energia mínima associado a (P) e prove que é equivalente ao problema considerado na alínea anterior.
3. Considere o método dos elementos finitos lineares, definido numa partição uniforme do intervalo  $[0, 1]$  de espaçamento  $h = \frac{1}{n+1}$ .
  - (a) Identifique o problema associado ao método de Galerkin, mostrando que a matriz  $A$  do sistema linear a resolver pode ser escrita na forma

$$A = K + \alpha M,$$

em que  $K$  é a matriz de rigidez (dada na Aula 21),  $\alpha = \frac{k}{T}$  e  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , designada por *matriz de massa*, é dada por

$$M = \frac{h}{6} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (b) Identifique o problema associado ao método de Ritz.
- (c) Prove que os problemas deduzidos nas alíneas anteriores são equivalentes (no sentido de terem as mesmas soluções).
- (d) Seja  $w(x) = 1 + \sin(4\pi x)$ ,  $T = 1$  e  $k = 0.1$ .
  - i. Obtenha a solução aproximada para (P) considerando  $h = 1/10, 1/20, 1/40$ .
  - ii. Deduza a ordem de precisão do método.