

Normas e seminormas

1. Prove que as seguintes funções são normas em \mathbb{R}^n .
 - (a) Norma l_1 : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
 - (b) Norma l_2 ou norma euclidiana: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$.
 - (c) Norma máxima ou de Chebyshev: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.
2. Prove que as seguintes funções são normas em $C[a, b]$.
 - (a) Norma L_2 : $\forall f \in C[a, b]$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 \right)^{1/2}$.
 - (b) Norma de Chebyshev: $\forall f \in C[a, b]$, $\|f\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$.
3. Calcule $\|f\|_\infty$ e $\|f\|_2$ para a função $f(x) = (1+x)^{-1}$ no intervalo $[0, 1]$.
4. Mostre que $\|f - g\| \geq \|f\| - \|g\|$ para todas as normas.
5. (a) Dados $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b] \subset \mathbb{R}$, prove que a aplicação $\|\cdot\| : C^{n+1}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|f\| = \max_{0 \leq i \leq n} |f(x_i)|$ é uma seminorma.
 - (b) Justifique como se pode ter $\|f\| = 0$ sem que $f \equiv 0$.
 - (c) Mostre que o polinómio de grau $\leq n$, interpolador de f nos pontos x_0, x_1, \dots, x_n minimiza $\max_{p \in P_n} \|f - p\|$, onde P_n designa o conjunto dos polinómios de grau $\leq n$.

Sistemas de equações não lineares

6. O seguinte sistema não linear
$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 & = 0, \\ y - \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) & = 0, \end{cases}$$
tem uma solução próxima de $[0.25, 0.25]^T$.
 - (a) Justificando, determine uma função G e um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tenha um único ponto fixo em Ω .
 - (b) Aplique o algoritmo do ponto fixo para aproximar a solução em duas iterações.
7. Considere o sistema
$$\begin{cases} 3x - \cos(yz) - 0.5 & = 0, \\ x^2 - 81(y + 0.1)^2 + \sin z + 1.06 & = 0, \\ e^{-xy} + 20z + \frac{10\pi - 3}{3} & = 0, \end{cases}$$
com $-1 \leq x, y, z \leq 1$. Resolva-o usando o método do ponto fixo em duas iterações.
8. O sistema $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 & = 0, \\ x(6-x) + y - 9 & = 0, \end{cases}$ tem duas soluções, uma das quais é $[x, y]^T = [3, 0]^T$. Determine a outra solução do sistema usando o método de Newton em segunda aproximação, indicando o erro cometido com a norma de Chebyshev.

9. Diga como procederia para determinar os números $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n < 1$ tais que

$$G'(\xi_i) = G[\xi_{i-1}, \xi_{i+1}], \quad i = 1, \dots, n,$$

com $G(x) = x^3$, $\xi_0 = 0$ e $\xi_{n+1} = 1$.

10. Particularize o exercício anterior para $n = 3$ e considere, como aproximações iniciais no processo iterativo, $\xi_i^{(0)} = \frac{i}{n+1}$, $i = 1, \dots, n$.

11. O sistema $\begin{cases} x + 3 \ln |x| - y^2 = 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 = 0, \end{cases}$ tem várias soluções. Começando com a aproximação inicial $[x^{(0)}, y^{(0)}]^T = [2, 2]^T$, compare os resultados obtidos pelo método de Newton e pelo método de Newton modificado.

12. Considere o sistema $\begin{cases} x + y^3 - 5y^2 - 2y = 10, \\ x + y^3 + y^2 - 14y = 29. \end{cases}$

(a) Use o método de Newton e o método de Newton discretizado para calcular a solução do sistema com aproximação inicial $x^{(0)} = 1.5$ e $y^{(0)} = -2$.

(b) Calcule a solução do sistema explicitando x na primeira equação e substituindo na segunda.

13. Use o método de Newton discretizado para encontrar a solução, para $0 \leq x, y \leq 1$, do sistema

$$\begin{cases} \cos \frac{x^2 - \sqrt{\sin(xy)+3}}{4+(xy)^2} + \sin(3xy - 1) = 0.934, \\ \exp(\cos((xy)^3 - 3)) + \tan\left(\frac{x}{y}(0.08 + \cos x)\right) = 1.79. \end{cases}$$

14. Consideremos, de novo, o sistema de equações não lineares do exercício 7 e seja $x^{(0)} = 0.1$, $y^{(0)} = 0.1$ e $z^{(0)} = -0.1$. Aproxime a solução do sistema pelo método de Newton amortecido.

15. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y^3 - 5y^2 - 2y = 10, \\ x + y^3 + y^2 - 14y = 29. \end{cases}$$

(a) Use o método de Newton de Newton amortecido para calcular a solução do sistema com aproximação inicial $x^{(0)} = 1.5$ e $y^{(0)} = -2$.

(b) Calcule a solução do sistema explicitando x na primeira equação e substituindo na segunda.

16. Para calcular a aspecto de uma calha de escoamento, por gravidade, com o objectivo de minimizar o tempo de descarga de um determinado produto granulado (Chiarella, Charlton, Roberts (1975)), é necessário resolver as seguintes equações não lineares pelo método de Newton

$$\begin{cases} f_n(\theta_1, \dots, \theta_N) \equiv \frac{\sin \theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \frac{\sin \theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0, & n = 1, \dots, N-1, \\ f_N(\theta_1, \dots, \theta_N) \equiv \Delta y \sum_{j=1}^N \tan \theta_j - X = 0, \end{cases}$$

onde

$$(a) \quad v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^n \frac{1}{\cos \theta_j}, \quad n = 1, \dots, N, \quad e$$

$$(b) \quad w_n = -\Delta y v_n \sum_{j=1}^N \frac{1}{v_j^3 \cos \theta_j}, \quad n = 1, \dots, N.$$

A constante v_0 é a velocidade inicial do produto granulado, X a coordenada em x do extremo final da calha, μ a força de atrito, N o número de segmentos da calha e g a constante de gravidade. As variáveis θ_j são os ângulos que os respectivos segmentos da calha fazem com a vertical e v_j a velocidade das partículas no j -ésimo segmento da calha.

Resolva o sistema para $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_N]^T$ usando o método de Newton com $\mu = 0$, $X = 2$, $\Delta y = 0.2$, $N = 20$, $v_0 = 0$, e $g = 32$ pés/seg², onde os valores de v_n e w_n são dados por (i) e (ii). Aplique o método até que $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\| < 10^{-2}$ rad.