Normas e seminormas

1. Prove que as seguintes funções são normas em $I\!R^n$.
   (a) Norma l_1: $\forall x \in I\!R^n$, $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.
   (b) Norma l_2 ou norma euclidiana: $\forall x \in I\!R^n$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.
   (c) Norma máxima ou de Chebyshev: $\forall x \in I\!R^n$, $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$.

2. Prove que as seguintes funções são normas em $C[a,b]$.
   (a) Norma L_2: $\forall f \in C[a,b]$, $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2}$.
   (b) Norma de Chebyshev: $\forall f \in C[a,b]$, $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$.

3. Calcule $\|f\|_\infty$ e $\|f\|_2$ para a função $f(x) = (1+x)^{-1}$ no intervalo $[0,1]$.

4. Mostre que $\|f-g\| \ge \|f\| - \|g\|$ para todas as normas.

5. (a) Dados $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b] \subset I\!R$, prove que a aplicação $\|\cdot\| : C^{n+1}([a,b]) \longrightarrow I\!R$ definida por $\|f\| = \max\limits_{0\le i\le n} |f(x_i)|$ é uma seminorma.
   (b) Justifique como se pode ter $\|f\| = 0$ sem que $f \equiv 0$.
   (c) Mostre que o polinómio de grau $\le n$, interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ minimiza $\max\limits_{p\in P_n} \|f-p\|$, onde P_n designa o conjunto dos polinómios de grau $\le n$.

Sistemas de equações não lineares

6. O seguinte sistema não linear
$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x^2 - y^2 & = & 0, \\ y - \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) & = & 0, \end{array}\right.$$
tem uma solução próxima de $[0.25, 0.25]^{\mathrm{T}}$.
   (a) Justificando, determine uma função G e um conjunto $\Omega \subset I\!R^2$ tal que $G : \Omega \longrightarrow I\!R^2$ tenha um único ponto fixo em Ω.
   (b) Aplique o algoritmo do ponto fixo para aproximar a solução em duas iterações.

7. Considere o sistema
$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x - \cos(yz) - 0.5 & = & 0, \\ x^2 - 81(y+0.1)^2 + \sin z + 1.06 & = & 0, \\ e^{-xy} + 20z + \frac{10\pi-3}{3} & = & 0, \end{array}\right.$$
com $-1 \le x, y, z \le 1$. Resolva-o usando o método do ponto fixo em duas iterações.

8. O sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x^2 - 2x + y^2 - 3 & = & 0, \\ x(6-x) + y - 9 & = & 0, \end{array}\right.$ tem duas soluções, uma das quais é $[x,y]^{\mathrm{T}} = [3,0]^{\mathrm{T}}$. Determine a outra solução do sistema usando o método de Newton em segunda aproximação, indicando o erro cometido com a norma de Chebyshev.

9. Diga como procederia para determinar os números $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < 1$ tais que

$$G'(\xi_i) = G[\xi_{i-1}, \xi_{i+1}], \qquad i = 1, \ldots, n,$$

com $G(x) = x^3$, $\xi_0 = 0$ e $\xi_{n+1} = 1$.

10. Particularize o exercício anterior para $n = 3$ e considere, como aproximações iniciais no processo iterativo, $\xi_i^{(0)} = \frac{i}{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$.

11. O sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x + 3\ln|x| - y^2 & = & 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 & = & 0, \end{array} \right.$ tem várias soluções. Começando com a aproximação inicial $[x^{(0)}, y^{(0)}]^{\mathrm{T}} = [2, 2]^{\mathrm{T}}$, compare os resultados obtidos pelo método de Newton e pelo método de Newton modificado.

12. Considere o sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} x + y^3 - 5y^2 - 2y & = & 10, \\ x + y^3 + y^2 - 14y & = & 29. \end{array} \right.$

    (a) Use o método de Newton e o método de Newton discretizado para calcular a solução do sistema com aproximação inicial $x^{(0)} = 1.5$ e $y^{(0)} = -2$.

    (b) Calcule a solução do sistema explicitando x na primeira equação e substituindo na segunda.

13. Use o método de Newton discretizado para encontrar a solução, para $0 \leq x, y \leq 1$, do sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos \frac{x^2 - \sqrt{\sin{(xy)} + 3}}{4 + (xy)^2} + \sin{(3xy - 1)} & = & 0.934, \\ \exp{(\cos{((xy)^3 - 3)})} + \tan{\left(\frac{x}{y}(0.08 + \cos x)\right)} & = & 1.79. \end{array} \right.$$

14. Consideremos, de novo, o sistema de equações não lineares do exercício 7 e seja $x^{(0)} = 0.1$, $y^{(0)} = 0.1$ e $z^{(0)} = -0.1$. Aproxime a solução do sistema pelo método de Newton amortecido.

15. Considere o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y^3 - 5y^2 - 2y & = & 10, \\ x + y^3 + y^2 - 14y & = & 29. \end{array} \right.$$

    (a) Use o método de Newton de Newton amortecido para calcular a solução do sistema com aproximação inicial $x^{(0)} = 1.5$ e $y^{(0)} = -2$.

    (b) Calcule a solução do sistema explicitando x na primeira equação e substituindo na segunda.

16. Para calcular a aspecto de uma calha de escoamento, por gravidade, com o objectivo de minimizar o tempo de descarga de um determinado produto granulado (Chiarella, Charlton, Roberts (1975)), é necessário resolver as seguintes equações não lineares pelo método de Newton

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_n(\theta_1, \ldots, \theta_N) & \equiv & \frac{\sin\theta_{n+1}}{v_{n+1}}(1 - \mu w_{n+1}) - \frac{\sin\theta_n}{v_n}(1 - \mu w_n) = 0, \quad n = 1, \ldots, N-1, \\ f_N(\theta_1, \ldots, \theta_N) & \equiv & \Delta y \sum_{j=1}^{N} \tan\theta_j - X = 0, \end{array} \right.$$

onde

    (a) $v_n^2 = v_0^2 + 2gn\Delta y - 2\mu\Delta y \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\cos\theta_j}, \qquad n = 1, \ldots, N, \qquad$ e

    (b) $w_n = -\Delta y v_n \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{v_j^3 \cos\theta_j}, \qquad n = 1, \ldots, N.$

A constante v_0 é a velocidade inicial do produto granulado, X a coordenada em x do extremo final da calha, μ a força de atrito, N o número de segmentos da calha e g a constante de gravidade. As variáveis θ_j são os ângulos que os respectivos segmentos da calha fazem com a vertical e v_j a velocidade das partículas no j-ésimo segmento da calha.

Resolva o sistema para $\theta = [\theta_1, \ldots, \theta_N]^{\mathrm{T}}$ usando o método de Newton com $\mu = 0$, $X = 2$, $\Delta y = 0.2$, $N = 20$, $v_0 = 0$, e $g = 32$ pés/seg^2, onde os valores de v_n e w_n são dados por (i) e (ii). Aplique o método até que $\|\theta^{(k+1)} - \theta^{(k)}\| < 10^{-2}\,\mathrm{rad}$.