Normas e seminormas

1. Prove que as seguintes funções são normas em IR^n.

   (a) Norma l_1: $\forall x \in IR^n, \qquad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$

   (b) Norma l_2 ou norma euclidiana: $\forall x \in IR^n, \qquad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$

   (c) Norma máxima ou de Chebyshev: $\forall x \in IR^n, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$

2. Prove que as seguintes funções são normas em $C[a,b]$.

   (a) Norma L_2: $\forall f \in C[a,b], \qquad \|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2\right)^{1/2}.$

   (b) Norma de Chebyshev: $\forall f \in C[a,b], \qquad \|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|.$

3. Calcule $\|f\|_\infty$ e $\|f\|_2$ para a função $f(x) = (1+x)^{-1}$ no intervalo $[0,1]$.

4. Mostre que $\|f-g\| \ge \|f\| - \|g\|$ para todas as normas.

5. (a) Dados $x_0, x_1, \ldots, x_n \in [a,b] \subset IR$, prove que a aplicação $\|\cdot\| : C^{n+1}([a,b]) \longrightarrow IR$ definida por $\|f\| = \max_{0\le i\le n} |f(x_i)|$ é uma seminorma.

   (b) Justifique como se pode ter $\|f\| = 0$ sem que $f \equiv 0$.

   (c) Mostre que o polinómio de grau $\le n$, interpolador de f nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ minimiza $\max_{p\in P_n} \|f-p\|$, onde P_n designa o conjunto dos polinómios de grau $\le n$.

Aproximação dos mínimos quadrados

6. Calcule a parábola dos mínimos quadrados para a função $f(x)$ dada pela seguinte tabela

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
y_i	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	2.1	1.7

7. Usando o critério dos mínimos quadrados, determine os coeficientes A e B de forma a ajustar a curva $y = \dfrac{100}{A+Bx}$ aos dados da tabela

x_i	1	2	3	4
y_i	8.3330	7.1430	6.250	5.5555

   Sugestão: Utilize a mudança de variável $z = \frac{100}{y}$ e trabalhe com 3 c.d.c. para z_i.

8. Considere a tabela

x_i	1.6	2.5	3.2	4.1
y_i	3.74	11.23	26.48	79.03

   Aproxime a função $y = ae^{bx}$ aos valores da tabela, calculando a e b por regressão linear.

9. Seja $I = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = 1\}$ um conjunto de pontos em progressão aritmética de cardinal muito elevado. Suponhamos que pretendemos aproximar, pelo método dos mínimos quadrados, uma determinada função definida nesse conjunto de pontos, recorrendo a um polinómio de grau m. Nestas circunstâncias, prove que a matriz dos coeficientes é aproximadamente

$$n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(m+1) \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(m+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/(m+1) & 1/(m+2) & 1/(m+3) & \cdots & 1/(2m+1) \end{bmatrix}.$$

10. Encontre a aproximação polinomial dos mínimos quadrados de grau 1 e 2 para as seguintes funções nos intervalos indicados: (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$; (b) $f(x) = 1/x$, $x \in [1,3]$; (c) $f(x) = \ln x$, $x \in [1,2]$.

Polinómios ortogonais

11. Dada uma família de polinómios ortogonais no intervalo $[a,b]$, que mudança de variável deverá efectuar para obter uma família de polinómios ortogonais em $[c,d]$.

12. Seja $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ um conjunto de polinómios ortogonais relativamente ao produto interno $(\cdot,\cdot)$. Mostre que os polinómios satisfazem a seguinte relação de recorrência:

$$p_0(x) = 1, \qquad p_1(x) = x - B_1, \qquad p_{k+1}(x) = (x - B_{k+1})p_k(x) - C_{k+1}p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

sendo $B_{k+1} = (xp_k, p_k)/(p_k, p_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, e $C_{k+1} = (p_k, p_k)/(p_{k-1}, p_{k-1})$, $k = 1, \ldots$.

13. Seja P_n um polinómio de grau n cujo coeficiente do termo de maior grau é igual à unidade. Mostre que o mínimo de

$$\|P_n\|^2 = \int_a^b P_n^2(x)\omega(x)dx, \qquad x \in [a,b],$$

é obtido para $P_n(x) = \phi_n(x)/a_n$, $x \in [a,b]$, onde $\{\phi_1, \ldots \phi_n\}$ é um conjunto de polinómios ortogonais em $[a,b]$ relativamente à função peso ω e a_n é o coeficiente do termo de maior grau de ϕ_n.

14. Deduza polinómios ortogonais em $[-1,1]$ relativamente à função peso ω, com: (a) $\omega(x) = 1$; (b) $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$.

15. Seja P_n o polinómio de Legendre de grau n. Prove que:
    (a) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ e P_n tem n zeros reais distintos em $[-1,1]$;
    (b) $\int_{-1}^{1} P_n(x)Q_k(x)dx = 0$, com Q_k um polinómio de grau $k < n$.

16. Prove que, considerando a função peso $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$, os polinómios de Chebyshev verificam, em $[-1,1]$, a relação

$$(T_i, T_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pi, & i = j = 0, \\ \pi/2, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

17. O polinómio de Chebyshev de grau n na variável x, com $x \in [-1,1]$, pode ser obtido a partir de

$$T_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

    (a) Demonstre que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$.
    (b) Mostre que T_n tem os zeros localizados nos pontos $x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \ldots, n$, e os extremos localizados nos pontos $x'_k = \cos\frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, nos quais $T_n(x'_k) = (-1)^k$.
    (c) Usando os polinómios de Chebyshev, determine a recta dos mínimos quadrados que aproxima $y(x) = x^3$.

18. Mostre que o polinómio mónico de Chebyshev de grau n é, de todos os polinómios mónicos de grau n em $[-1,1]$, o que tem menor norma.