Aproximação dos mínimos quadrados

1. Dada a tabela

x_i	-1.543	0.210	1.402	2.412
y_i	8.583	5.810	3.929	2.363

,

determine a recta dos mínimos quadrados para os valores dados.

2. Calcule a parábola dos mínimos quadrados para a função $f(x)$ dada pela seguinte tabela

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x_i)$	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	2.1	1.7

.

3. Usando o critério dos mínimos quadrados, determine os coeficientes A e B de forma a ajustar a curva $y = \dfrac{100}{A + Bx}$ aos dados da tabela

x_i	1	2	3	4
y_i	8.3330	7.1430	6.250	5.5555

.

Sugestão: Utilize a mudança de variável $z = \frac{100}{y}$ *e trabalhe com* 3 *c.d.c. para* z_i *.*

4. Considere a tabela

x_i	1.6	2.5	3.2	4.1
y_i	3.74	11.23	26.48	79.03

.

Aproxime a função $y = ae^{bx}$ aos valores da tabela, calculando a e b por regressão linear.

5. Seja $I = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_n = 1\}$ um conjunto de pontos em progressão aritmética de cardinal muito elevado. Suponhamos que pretendemos aproximar, pelo método dos mínimos quadrados, uma determinada função definida nesse conjunto de pontos, recorrendo a um polinómio de grau m . Nestas circunstâncias, prove que a matriz dos coeficientes é aproximadamente

$$n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(m+1) \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(m+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/(m+1) & 1/(m+2) & 1/(m+3) & \cdots & 1/(2m+1) \end{bmatrix}.$$

6. Encontre a aproximação polinomial dos mínimos quadrados de grau 1 e 2 para as seguintes funções nos intervalos indicados:

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$;

   (b) $f(x) = 1/x$, $x \in [1, 3]$;

   (c) $f(x) = \ln x$, $x \in [1, 2]$.

Polinómios ortogonais

7. Dada uma família de polinómios ortogonais no intervalo $[a,b]$, que mudança de variável deverá efectuar para obter uma família de polinómios ortogonais em $[c,d]$.

8. Seja $\{p_0, p_1, p_2, \ldots\}$ um conjunto de polinómios ortogonais relativamente ao produto interno $(\cdot,\cdot)$. Mostre que os polinómios satisfazem a seguinte relação de recorrência:
$$p_0(x)=1, \qquad p_1(x)=x-B_1, \qquad p_{k+1}(x)=(x-B_{k+1})p_k(x)-C_{k+1}p_{k-1}(x), \quad k=1,2,\ldots,$$
sendo
$$B_{k+1}=(xp_k,p_k)/(p_k,p_k), \qquad k=0,1,\ldots,$$
e
$$C_{k+1}=(p_k,p_k)/(p_{k-1},p_{k-1}), \qquad k=1,\ldots.$$

9. Seja P_n um polinómio de grau n cujo coeficiente do termo de maior grau é igual à unidade. Mostre que o mínimo de
$$\|P_n\|^2=\int_a^b P_n^2(x)\omega(x)dx, \qquad x\in[a,b],$$
é obtido para $P_n(x)=\phi_n(x)/a_n$, $x\in[a,b]$, onde $\{\phi_1,\ldots\ \phi_n\}$ é um conjunto de polinómios ortogonais em $[a,b]$ relativamente à função peso ω e a_n é o coeficiente do termo de maior grau de ϕ_n.

10. Deduza polinómios ortogonais em $[-1,1]$ relativamente à função peso ω, com:
    (a) $\omega(x)=1$;
    (b) $\omega(x)=\sqrt{1-x^2}$.

11. Seja P_n o polinómio de Legendre de grau n. Prove que:
    (a) $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$ e P_n tem n zeros reais distintos em $[-1,1]$;
    (b) $\int_{-1}^1 P_n(x)Q_k(x)dx=0$, com Q_k um polinómio de grau $k<n$.

12. Prove que, considerando a função peso $\omega(x)=\sqrt{1-x^2}$, os polinómios de Chebyshev verificam, em $[-1,1]$, a relação
$$(T_i,T_j)=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \pi, & i=j=0,\\ \pi/2, & i=j\neq 0.\end{cases}$$

13. O polinómio de Chebyshev de grau n na variável x, com $x\in[-1,1]$, pode ser obtido a partir de
$$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta.$$
    (a) Demonstre que $T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)$, $n=1,2,\ldots$.
    (b) Mostre que T_n tem os zeros localizados nos pontos $x_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k=1,\ldots,n$, e os extremos localizados nos pontos $x_k'=\cos\frac{k\pi}{n}$, $k=0,1,\ldots,n$, nos quais $T_n(x_k')=(-1)^k$.
    (c) Usando os polinómios de Chebyshev, determine a recta dos mínimos quadrados que aproxima $y(x)=x^3$.

14. Mostre que o polinómio mónico de Chebyshev de grau n é, de todos os polinómios mónicos de grau n em $[-1,1]$, o que tem menor norma.