

Aproximação dos mínimos quadrados

1. Dada a tabela

x_i	-1.543	0.210	1.402	2.412
y_i	8.583	5.810	3.929	2.363

determine a recta dos mínimos quadrados para os valores dados.

2. Calcule a parábola dos mínimos quadrados para a função $f(x)$ dada pela seguinte tabela

x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(x_i)$	2.9	2.8	2.7	2.3	2.1	2.1	1.7

3. Usando o critério dos mínimos quadrados, determine os coeficientes A e B de forma a ajustar a curva $y = \frac{100}{A + Bx}$ aos dados da tabela

x_i	1	2	3	4
y_i	8.3330	7.1430	6.250	5.5555

Sugestão: Utilize a mudança de variável $z = \frac{100}{y}$ e trabalhe com 3 c.d.c. para z_i .

4. Considere a tabela

x_i	1.6	2.5	3.2	4.1
y_i	3.74	11.23	26.48	79.03

Aproxime a função $y = ae^{bx}$ aos valores da tabela, calculando a e b por regressão linear.

5. Seja $I = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = 1\}$ um conjunto de pontos em progressão aritmética de cardinal muito elevado. Suponhamos que pretendemos aproximar, pelo método dos mínimos quadrados, uma determinada função definida nesse conjunto de pontos, recorrendo a um polinómio de grau m . Nestas circunstâncias, prove que a matriz dos coeficientes é aproximadamente

$$n \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(m+1) \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & \cdots & 1/(m+2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1/(m+1) & 1/(m+2) & 1/(m+3) & \cdots & 1/(2m+1) \end{bmatrix}.$$

6. Encontre a aproximação polinomial dos mínimos quadrados de grau 1 e 2 para as seguintes funções nos intervalos indicados:

- (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$;
- (b) $f(x) = 1/x$, $x \in [1, 3]$;
- (c) $f(x) = \ln x$, $x \in [1, 2]$.

Polinómios ortogonais

7. Dada uma família de polinómios ortogonais no intervalo $[a, b]$, que mudança de variável deverá efectuar para obter uma família de polinómios ortogonais em $[c, d]$.
8. Seja $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ um conjunto de polinómios ortogonais relativamente ao produto interno (\cdot, \cdot) . Mostre que os polinómios satisfazem a seguinte relação de recorrência:

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x - B_1, \quad p_{k+1}(x) = (x - B_{k+1})p_k(x) - C_{k+1}p_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots,$$

sendo

$$B_{k+1} = (xp_k, p_k)/(p_k, p_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

e

$$C_{k+1} = (p_k, p_k)/(p_{k-1}, p_{k-1}), \quad k = 1, \dots$$

9. Seja P_n um polinómio de grau n cujo coeficiente do termo de maior grau é igual à unidade. Mostre que o mínimo de

$$\|P_n\|^2 = \int_a^b P_n^2(x)\omega(x)dx, \quad x \in [a, b],$$

é obtido para $P_n(x) = \phi_n(x)/a_n$, $x \in [a, b]$, onde $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é um conjunto de polinómios ortogonais em $[a, b]$ relativamente à função peso ω e a_n é o coeficiente do termo de maior grau de ϕ_n .

10. Deduza polinómios ortogonais em $[-1, 1]$ relativamente à função peso ω , com:

- (a) $\omega(x) = 1$;
- (b) $\omega(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

11. Seja P_n o polinómio de Legendre de grau n . Prove que:

- (a) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$ e P_n tem n zeros reais distintos em $[-1, 1]$;
- (b) $\int_{-1}^1 P_n(x)Q_k(x)dx = 0$, com Q_k um polinómio de grau $k < n$.

12. Prove que, considerando a função peso $\omega(x) = \sqrt{1 - x^2}$, os polinómios de Chebyshev verificam, em $[-1, 1]$, a relação

$$(T_i, T_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \pi, & i = j = 0, \\ \pi/2, & i = j \neq 0. \end{cases}$$

13. O polinómio de Chebyshev de grau n na variável x , com $x \in [-1, 1]$, pode ser obtido a partir de

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta.$$

- (a) Demonstre que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \dots$
- (b) Mostre que T_n tem os zeros localizados nos pontos $x_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = 1, \dots, n$, e os extremos localizados nos pontos $x'_k = \cos \frac{k\pi}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, nos quais $T_n(x'_k) = (-1)^k$.
- (c) Usando os polinómios de Chebyshev, determine a recta dos mínimos quadrados que aproxima $y(x) = x^3$.

14. Mostre que o polinómio mónico de Chebyshev de grau n é, de todos os polinómios mónicos de grau n em $[-1, 1]$, o que tem menor norma.