Fórmulas de quadratura de Gauss

1. Determine a fórmula de Gauss de ordem 3. Prove que a fórmula tem, de facto, ordem 3.

2. Determine a fórmula de Gauss-Legendre de ordem 5 (3 pontos).

3. Demonstre que
$$w_i = \int_{-1}^{1} [l_i(x)]^2 dx,$$
onde os w_i são os coeficientes de $f(x_i)$ intervenientes nas fórmulas de Gauss e
$$l_i(x) = \prod_{j=1,\ j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

4. Usando as fórmulas de quadratura de Gauss determine o valor exacto de
$$\int_{-2}^{2} (x^3 - 1) dx.$$

5. Usando a fórmula de Gauss com 3 pontos, determine um valor aproximado de:
   (a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$;
   (b) $\int_0^{\pi/2} \sin x dx$.

   Qual o erro cometido nas aproximações obtidas?

6. Determine
$$\int_{-1}^{1} e^x dx$$
com um erro inferior ou igual a 0.2×10^{-3}, usando as fórmulas de Gauss.

7. Calcule
$$\int_0^1 \int_{x+2}^{x^3} \frac{1}{x^2 + y^2} dx dy.$$

8. Diga como poderia proceder para obter aproximações aos integrais do tipo:
   (a) $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, [Fórmulas de Gauss-Chebyshev];
   (b) $\int_0^{+\infty} e^{-x} f(x) dx$, [Fórmulas de Gauss-Laguerre];
   (c) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x) dx$, [Fórmulas de Gauss-Hermite].

9. A regra de Lobatto é usada para calcular integrais da forma
$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx A_0 f(-1) + A_1 f(x_1) + \cdots + A_{N-1} f(x_{N-1}) + A_N f(1).$$
determine a regra de Lobatto para $N = 2$, indicando a sua ordem de precisão.

Funções periódicas

10. Prove que toda a função pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar. Exemplifique para o caso da função $\exp(x)$.

11. Determine o período fundamental de
$$f(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n \in \mathbb{N}, \qquad L > 0.$$

12. Mostre que o sistema trigonométrico
$$\{1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin kx, \cos kx, \ldots\}$$
tem período $T = 2\pi$.

Séries e transformadas discretas de Fourier

13. Demostre que
$$\{1, \sin x, \cos x, \ldots, \sin kx, \cos kx, \ldots\}$$
é um conjunto de funções ortogonais em $[-\pi, \pi]$.

14. (a) Determine a série de Fourier para a função:
    i. $u(x) = \mathrm{sign}(\sin x)$ em $(-\pi, \pi)$, [onda rectangular];
    ii. $u(x) = x$ em $(-\pi, \pi)$;
    iii. $u(x) = x^2$ em $(-\pi, \pi)$.

    (b) Qual o valor da série em $x = \pi$? Verifique que esse valor é $\frac{1}{2}(u(\pi + 0) + u(\pi - 0))$.

15. (a) Determine a série de Fourier para a função $u(x) = |x|$, no intervalo $(-\pi, \pi)$.

    (b) Verifique que
$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

    (c) Aplique a igualdade de Parseval para obter outra expressão para π. É esta melhor que a anterior?

16. Considere a função $u(x) = \frac{1}{2}x$, no intervalo $(0, 2\pi)$.

    (a) Prove que u é seccionalmente contínua, em $[0, 2\pi]$, bem como a sua extensão periódica u_p.

    (b) Determine a sua série de Fourier e mostre que converge uniformemente para u_p em todos os pontos de continuidade de u_p.

    (c) O que acontece nos pontos de descontinuidade?

17. Repita o exercício anterior para
$$u(x) = \begin{cases} -\pi/2, & -\pi < x < 0, \\ \pi/2, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

18. (a) Calcule a transformada de Fourier discreta da "onda quadrada"
$$x = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1]^T, \qquad N = 8.$$

    (b) Faça a verificação calculando a transformada inversa.

    (c) Mostre que a igualdade de Parseval é satisfeita.