Sistemas de equações não lineares

1. O seguinte sistema não linear
$$\begin{cases} 5x^2 - y^2 &= 0, \\ y - \frac{1}{4}(\sin x + \cos y) &= 0, \end{cases}$$
tem uma solução próxima de $[0.25, 0.25]^{\mathrm{T}}$.
   (a) Justificando, determine uma função G e um conjunto $D \subset I\!R^2$ tal que $G : D \longrightarrow I\!R^2$ tenha um único ponto fixo em D.
   (b) Aplique o algoritmo do ponto fixo para aproximar a solução em duas iterações.

2. Considere o sistema
$$\begin{cases} 3x - \cos(yz) - 0.5 &= 0, \\ x^2 - 81(y+0.1)^2 + \sin z + 1.06 &= 0, \\ e^{-xy} + 20z + \dfrac{10\pi - 3}{3} &= 0, \end{cases}$$
com $-1 \le x, y, z \le 1$. Resolva-o usando o método do ponto fixo em duas iterações.

3. O sistema $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 3 &= 0, \\ x(6-x) + y - 9 &= 0, \end{cases}$ tem duas soluções, uma das quais é $[x, y]^{\mathrm{T}} = [3, 0]^{\mathrm{T}}$. Determine a outra solução do sistema usando o método de Newton em segunda aproximação, indicando o erro cometido com a norma de Chebyshev.

4. Diga como procederia para determinar os números $0 < \xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_n < 1$ tais que
$$G'(\xi_i) = G[\xi_{i-1}, \xi_{i+1}], \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$
com $G(x) = x^3$, $\xi_0 = 0$ e $\xi_{n+1} = 1$.

5. Particularize o exercício anterior para $\xi_i^{[0]} = \frac{i}{n+1}$, $i = 1, \ldots, n$.

6. O sistema $\begin{cases} x + 3\ln|x| - y^2 &= 0, \\ 2x^2 - xy - 5x + 1 &= 0, \end{cases}$ tem várias soluções. Começando com a aproximação inicial $[x^{[0]}, y^{[0]}]^{\mathrm{T}} = [2, 2]^{\mathrm{T}}$, compare os resultados obtidos pelo método de Newton e pelo método de Newton modificado.

7. Considere o sistema $\begin{cases} x + y^3 - 5y^2 - 2y &= 10, \\ x + y^3 + y^2 - 14y &= 29. \end{cases}$
   (a) Use o método de Newton e o método de Newton modificado para calcular a solução do sistema com aproximação inicial $x^{[0]} = 1.5$ e $y^{[0]} = -2$.
   (b) Calcule a solução do sistema explicitando x na primeira equação e substituindo na segunda.

8. Use o método de Newton modificado para encontrar a solução, para $0 \le x, y \le 1$, do sistema
$$\begin{cases} \cos \dfrac{x^2 - \sqrt{\sin(xy) + 3}}{4 + (xy)^2} + \sin(3xy - 1) &= 0.934, \\[2ex] \exp\Big(\cos\left((xy)^3 - 3\right)\Big) + \tan\left(\dfrac{x}{y}(0.08 + \cos x)\right) &= 1.79. \end{cases}$$

Equações de diferenças

9. Determine a solução da equação $y_n - y_{n+1} - y_{n+2} + y_{n+3} = 0$, com $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$.

10. Determine a solução geral das seguintes equações de diferenças:

    (a) $y_n - 2\cos\theta y_{n+1} + y_{n+2} = 0$, com θ independente de n;

    (b) $2y_n + y_{n+1} - y_{n+2} = 1$;

    (c) $y_n - 2y_{n+1} + y_{n+2} = n + 1$;

    (d) $y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = ax^n$, com a e x independentes de n.

11. Prove o Lema de Gronwall: Seja $\{z_n\}_{n=0}^N$ uma sucessão de números positivos tais que $z_{n+1} \leq Cz_n + D$, $n = 0, 1, \ldots, N-1$, com C e D constantes e $C > 0$. Então, para todo o $n = 0, \ldots, N$,

$$z_n \leq \frac{D}{1-C}(1 - C^n) + z_0 C^n, \quad C \neq 1, \qquad \text{e} \qquad z_n \leq nD + z_0, \quad C = 1.$$

Problemas de condição inicial

Existência e unicidade de solução

12. Mostre que a ciclóide

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - x_0 & = & R(t - \sin t), \\ y - h & = & R(1 - \cos t), \end{array} \right.$$

com $R = (4gk^2)^{-1}$, verifica $(1 - y'^2)^{-1/2} = k\sqrt{2g(y-h)}$.

13. Prove que a função $f : D \subseteq IR^2 \longrightarrow IR$ tal que $f(x,y) = x|y|$ é lipschitziana, na variável y, no conjunto $D = \{(x,y) \in IR^2 : 1 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 4\}$.

14. Mostre que o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & \dfrac{1}{1+y^2}, \\ y(a) & = & \alpha, \end{array} \right.$ para $t \in [a, b]$ tem solução única.

15. Considere o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & xy, \\ y(0) & = & 1. \end{array} \right.$

    (a) Usando o método de Picard determine uma solução aproximada do problema.

    (b) Determine o erro que se comete na aproximação obtida na alínea anterior, em $x = 1, 2, 3$, sabendo que a solução exacta é (prove!) $y(x) = \exp(x^2/2)$.

16. Considere o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & 10y - 10x + 1, \\ y(0) & = & 0, \end{array} \right.$ para $x \leq 0$, cuja solução é $y(x) = x$. Estude a dependência do problema em relação às condições iniciais.

17. Mostre que o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & -y + x + 1, \\ y(0) & = & 1, \end{array} \right.$ para $x \in [0, 1]$ é bem posto.

18. Prove o Lema de Gronwall: Seja $y(x)$ satisfazendo $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & ay + b, \\ y(0) & = & y_0, \end{array} \right.$ com a e b constantes. Então, para $x \leq 0$

$$y(x) \leq \exp(ax) y_0 + \frac{b}{a}(\exp(ax) - 1), \quad a \neq 0, \qquad \text{e} \qquad y(x) \leq y_0 + bx, \qquad a = 0.$$