

**Equações de diferenças**

- Determine a solução da equação  $u_i - u_{i+1} - u_{i+2} + u_{i+3} = 0$ , com  $u_0 = 0$ ,  $u_1 = 1$  e  $u_2 = 2$ .
- Determine a solução geral das seguintes equações de diferenças:
  - $u_i - 2 \cos \theta u_{i+1} + u_{i+2} = 0$ , com  $\theta$  independente de  $i$ ;
  - $2u_i + u_{i+1} - u_{i+2} = 1$ ;
  - $u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2} = i + 1$ ;
  - $u_{i+2} - u_{i+1} - u_i = at^i$ , com  $a$  e  $t$  independentes de  $i$ .
- Prove o Lema de Gronwall: Seja  $\{v_i\}_{i=0}^N$  uma sucessão de números positivos tais que  $v_{i+1} \leq Cv_i + D$ ,  $i = 0, 1, \dots, N - 1$ , com  $C$  e  $D$  constantes e  $C > 0$ . Então, para todo o  $i = 0, \dots, N$ ,

$$v_i \leq \frac{D}{1-C}(1-C^i) + v_0 C^i, \quad C \neq 1, \quad \text{e} \quad v_i \leq iD + v_0, \quad C = 1.$$

**Problemas de condição inicial  
Existência e unicidade de solução**

- Prove que a função  $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f(t, u) = t|u|$  é lipschitziana, na variável  $u$ , no conjunto  $D = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq t \leq 2, -3 \leq u \leq 4\}$ .
- Mostre que o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= \frac{1}{1+u^2}, \\ u(a) &= \alpha, \end{cases}$  para  $t \in [a, b]$  tem solução única.
- Considere o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= tu, \\ u(0) &= 1. \end{cases}$ 
  - Usando o método de Picard determine uma solução aproximada do problema.
  - Determine o erro que se comete na aproximação obtida na alínea anterior, em  $t = 1, 2, 3$ , sabendo que a solução exacta é (prove!)  $u(t) = \exp(t^2/2)$ .
- Considere o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= 10u - 10t + 1, \\ u(0) &= 0, \end{cases}$  para  $t \leq 0$ , cuja solução é  $u(t) = t$ . Estude a dependência do problema em relação às condições iniciais.
- Mostre que o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= -u + t + 1, \\ u(0) &= 1, \end{cases}$  para  $t \in [0, 1]$  é bem posto.
- Prove o Lema de Gronwall: Seja  $u(t)$  satisfazendo  $\begin{cases} u' &\leq au + b, \\ u(0) &= u_0, \end{cases}$  com  $a$  e  $b$  constantes. Então, para  $t \geq 0$

$$u(t) \leq \exp(at)u_0 + \frac{b}{a}(\exp(at) - 1), \quad a \neq 0, \quad \text{e} \quad u(t) \leq u_0 + bt, \quad a = 0.$$

## Métodos numéricos para problemas de condição inicial

### Métodos de passo único

10. Considere o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= -2u \\ u(0) &= 1 \end{cases}$ . Determine, usando o método de Euler, o valor aproximado de  $u(1)$ , fazendo  $h = 1$ ,  $h = 0.5$  e  $h = 0.25$ . Compare os resultados obtidos com a solução exacta.
11. Considere a equação diferencial  $u' = u$ , com  $0 \leq t \leq 1$  e  $u(0) = 1$ .
- Determine um limite superior para o erro global do método de Euler em  $t = 1$ , em termos da medida do passo  $h$ .
  - Resolva a equação de diferenças que resulta da aplicação do método de Euler.
  - Compare o limite superior obtido em (a) com o erro global dado por (b) em  $t = 1$ , para  $h = 0.1$  e  $h = 0.01$ .
12. Seja dado o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= \frac{2}{t}u + t^2e^t, \\ u(1) &= 0, \end{cases}$  com  $t \in [1, 2]$ , cuja solução exacta é  $u(t) = t^2(e^t - e)$ .
- Use o método de Euler com  $h = 0.1$  para aproximar a solução e compare-a com a solução exacta.
  - Calcule o valor de  $h$  que garante  $\|u - u_h\| \leq 0.1$ .
13. Mostre que o método  $u_{i+1} - u_i = hF_h(t_i, u_{i+1}, u_i)$ , verifica a condição de Lipschitz quando:
- $F_h(t_i, u_{i+1}, u_i) = f(t_i, u_i)$ , [Euler progressivo];
  - $F_h(t_i, u_{i+1}, u_i) = f(t_{i+1}, u_{i+1})$ , [Euler regressivo];
  - $F_h(t_i, u_{i+1}, u_i) = f\left(t_{i+2}, 3u_{i+1} - 2u_i + \frac{h}{2}f(t_{i+1}, u_{i+1}) - \frac{3h}{2}f(t_i, u_i)\right) + f(t_i, u_i)$ .
14. Prove que os métodos de Euler progressivo e regressivo são consistentes e determine a sua ordem (de consistência) e constante erro.
15. Para a problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= u, \\ u(0) &= 1, \end{cases}$  mostre que o método de Taylor de ordem  $p$  é dado por  $u_i = \left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^p}{p!}\right)^i$ , com  $i = 0, 1, \dots$ , para uma dada medida do passo  $h$ .
16. Seja dado o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= \frac{1}{1+u^2}, \\ u(0) &= 1. \end{cases}$  Use o método de Taylor de ordem dois para determinar o valor aproximado de  $u(1)$ .
17. Considere o método dos trapézios  $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}))$  na resolução de um problema de condição inicial.
- Determine a ordem e o erro de truncatura local do método.
  - Aplique o método ao problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= -tu^2 \\ u(0) &= 2 \end{cases}$  e obtenha uma aproximação em  $t = 1$  usando  $h < 1$ . (Considere a solução exacta positiva em  $[0, 1]$ .)
18. Considere o problema de condição inicial  $u' = -30u$ , com  $u(0) = 1$ , e os métodos de Euler progressivo e regressivo. Usando cada um dos métodos determine a solução do problema em  $t = 1$ , com  $h < 1$ .