## Equações de diferenças

1. Determine a solução da equação $u_i - u_{i+1} - u_{i+2} + u_{i+3} = 0$, com $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ e $u_2 = 2$.

2. Determine a solução geral das seguintes equações de diferenças:

   (a) $u_i - 2\cos\theta u_{i+1} + u_{i+2} = 0$, com $\theta$ independente de $i$;

   (b) $2u_i + u_{i+1} - u_{i+2} = 1$;

   (c) $u_i - 2u_{i+1} + u_{i+2} = i + 1$;

   (d) $u_{i+2} - u_{i+1} - u_i = at^i$, com $a$ e $t$ independentes de $i$.

3. Prove o Lema de Gronwall: Seja $\{v_i\}_{i=0}^N$ uma sucessão de números positivos tais que $v_{i+1} \leq Cv_i + D$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$, com $C$ e $D$ constantes e $C > 0$. Então, para todo o $i = 0, \ldots, N$,

$$v_i \leq \frac{D}{1-C}(1 - C^i) + v_0 C^i, \quad C \neq 1, \qquad \text{e} \qquad v_i \leq iD + v_0, \quad C = 1.$$

## Problemas de condição inicial

## Existência e unicidade de solução

4. Prove que a função $f : D \subseteq I\!R^2 \longrightarrow I\!R$ tal que $f(t,u) = t|u|$ é lipschitziana, na variável $u$, no conjunto $D = \{(t,u) \in I\!R^2 : 1 \leq t \leq 2, -3 \leq u \leq 4\}$.

5. Mostre que o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & \dfrac{1}{1+u^2}, \\ u(a) & = & \alpha, \end{array} \right.$ para $t \in [a, b]$ tem solução única.

6. Considere o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & tu, \\ u(0) & = & 1. \end{array} \right.$

   (a) Usando o método de Picard determine uma solução aproximada do problema.

   (b) Determine o erro que se comete na aproximação obtida na alínea anterior, em $t = 1, 2, 3$, sabendo que a solução exacta é (prove!) $u(t) = \exp(t^2/2)$.

7. Considere o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & 10u - 10t + 1, \\ u(0) & = & 0, \end{array} \right.$ para $t \leq 0$, cuja solução é $u(t) = t$. Estude a dependência do problema em relação às condições iniciais.

8. Mostre que o problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} u' & = & -u + t + 1, \\ u(0) & = & 1, \end{array} \right.$ para $t \in [0, 1]$ é bem posto.

9. Prove o Lema de Gronwall: Seja $u(t)$ satisfazendo $\left\{ \begin{array}{rcl} u' & \leq & au + b, \\ u(0) & = & u_0, \end{array} \right.$ com $a$ e $b$ constantes. Então, para $t \geq 0$

$$u(t) \leq \exp(at)u_0 + \frac{b}{a}(\exp(at) - 1), \quad a \neq 0, \qquad \text{e} \qquad u(t) \leq u_0 + bt, \qquad a = 0.$$

**Métodos numéricos para problemas de condição inicial**

**Métodos de passo único**

10. Considere o problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & -2u \\ u(0) & = & 1 \end{array}\right.$. Determine, usando o método de Euler, o valor aproximado de $u(1)$, fazendo $h=1$, $h=0.5$ e $h=0.25$. Compare os resultados obtidos com a solução exacta.

11. Considere a equação diferencial $u'=u$, com $0 \le t \le 1$ e $u(0)=1$.

    (a) Determine um limite superior para o erro global do método de Euler em $t=1$, em termos da medida do passo $h$.

    (b) Resolva a equação de diferenças que resulta da aplicação do método de Euler.

    (c) Compare o limite superior obtido em (a) com o erro global dado por (b) em $t=1$, para $h=0.1$ e $h=0.01$.

12. Seja dado o problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & \dfrac{2}{t}u + t^2 e^t, \\ u(1) & = & 0, \end{array}\right.$ com $t \in [1,2]$, cuja solução exacta é $u(t) = t^2(e^t - e)$.

    (a) Use o método de Euler com $h=0.1$ para aproximar a solução e compare-a com a solução exacta.

    (b) Calcule o valor de $h$ que garante $\|u-u_h\| \le 0.1$.

13. Mostre que o método $u_{i+1} - u_i = hF_h(t_i, u_{i+1}, u_i)$, verifica a condição de Lipschitz quando:

    (a) $F_h(t_i, u_{i+1}, u_i) = f(t_i, u_i)$, [Euler progressivo];

    (b) $F_h(t_i, u_{i+1}, u_i) = f(t_{i+1}, u_{i+1})$, [Euler regressivo];

    (c) $F_h(t_i, u_{i+1}, u_i) = f\left(t_{i+2}, 3u_{i+1} - 2u_i + \dfrac{h}{2} f(t_{i+1}, u_{i+1}) - \dfrac{3h}{2} f(t_i, u_i)\right) + f(t_i, u_i)$.

14. Prove que os métodos de Euler progressivo e regressivo são consistentes e determine a sua ordem (de consistência) e constante erro.

15. Para a problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & u, \\ u(0) & = & 1, \end{array}\right.$ mostre que o método de Taylor de ordem $p$ é dado por $u_i = \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2!} + \cdots + \dfrac{h^p}{p!}\right)^i$, com $i = 0, 1, \ldots$, para uma dada medida do passo $h$.

16. Seja dado o problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & \dfrac{1}{1+u^2}, \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$ Use o método de Taylor de ordem dois para determinar o valor aproximado de $u(1)$.

17. Considere o método dos trapézios $u_{i+1} = u_i + \dfrac{h}{2}(f(t_i, u_i) + f(t_{i+1}, u_{i+1}))$ na resolução de um problema de condição inicial.

    (a) Determine a ordem e o erro de truncatura local do método.

    (b) Aplique o método ao problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & -tu^2 \\ u(0) & = & 2 \end{array}\right.$ e obtenha uma aproximação em $t=1$ usando $h<1$. (Considere a solução exacta positiva em $[0,1]$.)

18. Considere o problema de condição inicial $u' = -30u$, com $u(0)=1$, e os métodos de Euler progressivo e regressivo. Usando cada um dos métodos determine a solução do problema em $t=1$, com $h<1$.