Métodos numéricos para problemas de condição inicial

Convergência: consistência e estabilidade zero

1. Mostre que o método $y_{n+1} - y_n = h\phi_h(x_n, y_{n+1}, y_n)$, verifica a condição de Lipschitz quando:

   (a) $\phi_h(x_n, y_{n+1}, y_n) = f(x_n, y_n)$, [Euler progressivo];

   (b) $\phi_h(x_n, y_{n+1}, y_n) = f(x_{n+1}, y_{n+1})$, [Euler regressivo];

   (c) $\phi_h(x_n, y_{n+1}, y_n) = f\left(x_{n+2}, 3y_{n+1} - 2y_n + \frac{h}{2}f(x_{n+1}, y_{n+1}) - \frac{3h}{2}f(x_n, y_n)\right) + f(x_n, y_n)$.

2. Prove que os métodos de Euler progressivo e regressivo são consistentes e determine a sua ordem (de consistência) e constante erro.

3. Determine a ordem e o erro de truncatura local dos métodos:

   (a) $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$, [Trapézios];

   (b) $y_{n+2} = \frac{1}{2}(y_{n+1} + y_{n+2}) + \frac{h}{4}(4f(x_{n+2}, y_{n+2}) - f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 3f(x_n, y_n))$;

   (c) $k_1 = f(x_n, y_n)$, $k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$, $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$, [Heun].

4. Considere o método linear de passo múltiplo $y_{n+3} + \frac{3}{2}y_{n+2} - 3y_{n+1} + \frac{1}{2}y_n = 3hf(x_{n+1}, y_{n+1})$.

   (a) Determine o seu erro de truncatura local.

   (b) Comente sobre a sua consistência, estabilidade zero e convergência.

5. Mostre que o método

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3}(3f(x_{n+1}, y_{n+1}) - 2f(x_n, y_n))$$

   é inconsistente. Mostre o efeito da inconsistência quando se usa o método na integração numérica do problema de condição inicial $\left\{ \begin{array}{rcl} y' & = & 4x\sqrt{y}, \\ y(0) & = & 1, \end{array} \right.$ em $x = 2$, sabendo que a suloção exacta é $y(x) = (1 + x^2)^2$.

6. Ilustre o efeito da estabilidade zero quando se usa o método

$$y_{n+2} - (1-a)y_{n+1} + ay_n = \frac{h}{2}\left((3-a)f(x_{n+1}, y_{n+1}) - (1-a)f(x_n, y_n)\right),$$

   com (i) $a = 0$, (ii) $a = -5$, no cálculo numérico da solução do problema de condição inicial dado no exercício anterior.

7. Verifique se os seguintes métodos lineares de passo múltiplo são convergentes:

   (a) $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = h\left(4f(x_{n+1}, y_{n+1}) + 2f(x_n, y_n)\right)$;

   (b) $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{12}\left(5f(x_{n+2}, y_{n+2}) + 8f(x_{n+1}, y_{n+1}) - f(x_n, y_n)\right)$, [Adams-Moulton de 2 passos].

Métodos de passo único

8. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -2y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$. Determine, usando o método de Euler, o valor aproximado de $y(1)$, fazendo $h = 1$, $h = 0.5$ e $h = 0.25$. Compare os resultados obtidos com a solução exacta.

9. Considere a equação diferencial $y' = y$, com $0 \le t \le 1$ e $y(0) = 1$.
   (a) Determine um limite superior para o erro global do método de Euler em $t = 1$, em termos da medida do passo h.
   (b) Resolva a equação de diferenças que resulta da aplicação do método de Euler.
   (c) Compare o limite superior obtido em (a) com o erro global dado por (b) em $t = 1$, para $h = 0.1$ e $h = 0.01$.

10. Seja dado o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= \dfrac{2}{t}y + t^2 e^t, \\ y(1) &= 0, \end{cases}$ com $t \in [1, 2]$, cuja solução exacta é $y(t) = t^2(e^t - e)$.
    (a) Use o método de Euler com $h = 0.1$ para aproximar a solução e compare-a com a solução exacta.
    (b) Calcule o valor de h que garante $\|y - y_h\| \le 0.1$.

11. Para a problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$ mostre que o método de Taylor de ordem p é dado por $y_n = \left(1 + h + \dfrac{h^2}{2!} + \cdots + \dfrac{h^p}{p!}\right)^n$, com $n = 0, 1, \ldots$, para uma dada medida do passo h.

12. Seja dado o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= \dfrac{1}{1+y^2}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$ Use o método de Taylor de ordem dois para determinar o valor aproximado de $y(1)$.

13. Deduza um método de Runge-Kutta explícito de ordem dois.

14. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= xy^2, \\ y(1) &= 2. \end{cases}$ Determine um valor aproximado para $y(1.1)$ usando o método de Heun.

15. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= y - \dfrac{2x}{y}, \\ y(0) &= 1. \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $y(0.8)$, usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro:

$$k_1 = f(x_n, y_n),\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1),\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2),\ k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3),$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

16. Mostre que, quando o segundo membro f não depende de y, o método de Runge-Kutta de quarta ordem se reduz à aplicação da regra de Simpson.

17. Considere o método dos trapézios na resolução de um problema de condição inicial.
    (a) Determine a ordem e o erro de truncatura local do método.
    (b) Aplique o método ao problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -ty^2 \\ y(0) &= 2 \end{cases}$ e obtenha uma aproximação em $t = 1$ usando $h < 1$. (Considere a solução exacta positiva em $[0, 1]$.)
    (c) Use o processo de extrapolação para melhorar o resultado obtido.