

**Métodos numéricos para problemas de condição inicial****Métodos de passo único: continuação**

1. Deduza um método de Runge-Kutta explícito de ordem dois.
2. Considere o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= tu^2, \\ u(1) &= 2. \end{cases}$  Determine um valor aproximado para  $u(1.1)$  usando o método de Heun  $k_1 = f(t_i, u_i)$ ,  $k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1)$ ,  $u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ .
3. Considere o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= u - \frac{2t}{u}, \\ u(0) &= 1. \end{cases}$  Determine um valor aproximado para  $u(0.8)$ , usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro:

$$k_1 = f(t_i, u_i), \quad k_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_1\right), \quad k_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_2\right), \quad k_4 = f(t_i + h, u_i + hk_3),$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

4. Mostre que, quando o segundo membro  $f$  não depende de  $u$ , o método de Runge-Kutta de quarta ordem se reduz à aplicação da regra de Simpson.
5. Mostre que cada um dos seguintes métodos de Runge-Kutta tem ordem quatro:

$$(a) \text{ Gauss: } \begin{array}{c|cc} (3 - \sqrt{3})/6 & 1/4 & (3 - 2\sqrt{3})/12 \\ (3 + \sqrt{3})/6 & (3 + 2\sqrt{3})/12 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}; \quad (b) \text{ Lobatto IIIB: } \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}.$$

**Estabilidade linear**

6. Mostre que o método de Runge-Kutta de quarta ordem aplicado à equação diferencial  $u' = \lambda u$  pode ser escrito na forma  $u_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right) u_i$ .
7. Determine as regiões de estabilidade absoluta dos métodos de Euler, Euler regressivo e trapézios.
8. Determine a função de estabilidade para os métodos dos trapézios e ponto médio implícito.
9. Mostre que os métodos dos trapézios e Euler regressivo são estáveis A.
10. Mostre que, qualquer que seja o método de Runge-Kutta explícito de três etapas de ordem três a sua função de estabilidade é dada por  $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}$ .
11. Determine, pelo método da sondagem as regiões de estabilidade absoluta para os métodos ERK de  $s$  etapas e de ordem  $s$ , com  $s = 1, 2, 3, 4$ .
12. Considere o seguinte método de Runge-Kutta semi-implícito:

$$k_1 = f(u_i + \beta hk_1), \quad k_2 = f(u_i + hk_1 + \beta hk_2); \quad u_{i+1} = u_i + h((0.5 + \beta)k_1 + (0.5 - \beta)k_2).$$

- (a) Determine a ordem  $p$  do método e mostre que é independente de  $\beta$ .
- (b) Obtenha a função de estabilidade do método e determine  $\beta$  por forma a que o método seja estável A.

### Métodos com passo variável

13. Considere o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= t^2 + u, \\ u(0) &= 1. \end{cases}$  Determine a medida do passo que nos garanta um resultado com quatro casas decimais correctas (comece com  $h = 0.05$ ) quando se usa na integração numérica: (a) o método de Euler; (b) o método dos trapézios.
14. Use o método de Runge-Kutta-Fehlberg *RKF45*

|       |           |            |            |             |        |      |
|-------|-----------|------------|------------|-------------|--------|------|
| 0     |           |            |            |             |        |      |
| 1/4   | 1/4       |            |            |             |        |      |
| 3/8   | 3/32      | 9/32       |            |             |        |      |
| 12/13 | 1932/2197 | -7200/2197 | 7296/2197  |             |        |      |
| 1     | 439/216   | -8         | 3680/513   | -845/4104   |        |      |
| 1/2   | -8/27     | 2          | -3544/2565 | 1859/4104   | -11/40 |      |
|       | 25/216    | 0          | 1408/2565  | 2197/4104   | -1/5   | 0    |
|       | 16/135    | 0          | 6656/12825 | 28561/56430 | -9/50  | 2/55 |

para aproximar a solução de  $\begin{cases} u' &= \sin t + e^{-t}, \\ u(0) &= 0, \end{cases}$  em  $t = 1$ , com erro inferior a  $10^{-4}$ . Use  $h_{max} = 0.25$ .

### Métodos lineares de passo múltiplo

15. Deduza, usando o polinómio interpolador de Lagrange, as expressões dos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de 2 passos.
16. Prove que, a partir do polinómio interpolador de Hermite se pode obter o método de passo múltiplo  $u_{i+2} + 4u_{i+1} - 5u_i = h(4f_{i+1} + 2f_i)$ . Diga, justificando, se se trata de um método convergente.
17. Deduza as expressões dos métodos de Nyström de  $k$  passos, com  $k = 0, 1, 2, 3$ .
18. Considere o problema de condição inicial  $\begin{cases} u' &= 2u, \\ u(0) &= 1. \end{cases}$  Determine um valor aproximado para  $u(1)$  usando o método do ponto médio -  $u_{i+2} = u_i + 2hf_{i+1}$  -, com  $h = 0.25$ .
19. Use o método
- $u_{i+4} = u_i + \frac{4h}{3}(2f_{i+3} - f_{i+2} + 2f_{i+1})$ , [Milne];
  - $u_{i+2} = u_{i+1} + \frac{h}{2}(3f_{i+1} - f_i)$ , [Adams-Bashforth de 2 passos].
- para determinar a solução de  $u' = \sin t + e^{-t}$ , em  $t = 1$ , com  $u(0) = 0$  e  $h = 0.1$ .
20. Determine a ordem para os seguintes métodos lineares de passo múltiplo:
- $u_{i+2} - u_i = \frac{h}{3}(f_{i+2} + 4f_{i+1} + f_i)$ , [Simpson];
  - $u_{i+2} - u_{i+1} = \frac{h}{12}(5f_{i+2} + 8f_{i+1} - f_i)$  [Adams-Moulton de 2 passos].
21. Determine a ordem e a constante erro para os métodos:
- $u_{i+2} - (1 - \alpha)u_{i+1} + \alpha u_i = h((1 + \beta)f_{i+2} - (\alpha + \beta + \alpha\beta)f_{i+1} + \alpha\beta f_i)$ ,  $\alpha \neq 0$ ;
  - $u_{i+4} - \frac{8}{19}(u_{i+3} - u_{i+1}) = \frac{6h}{19}(f_{i+4} + 4f_{i+3} + 4f_{i+1} + f_i)$  [Quade].
22. Deduza um método linear de passo múltiplo com dois passos, explícito, e com ordem máxima.
23. Construa uma família de métodos lineares de dois passo, com um parâmetro livre, implícita, de ordem máxima e determine a sua constante erro. Para que valores do parâmetro o método converge?