Métodos numéricos para problemas de condição inicial

Métodos de passo único: continuação

1. Deduza um método de Runge-Kutta explícito de ordem dois.

2. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} u' &= tu^2, \\ u(1) &= 2. \end{cases}$ Determine um valor aproximado para $u(1.1)$ usando o método de Heun $k_1 = f(t_i, u_i),\ k_2 = f(t_i + h, u_i + hk_1),\ u_{i+1} = u_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$.

3. Considere o problema de condição inicial $\begin{cases} u' &= u - \dfrac{2t}{u}, \\ u(0) &= 1. \end{cases}$. Determine um valor aproximado para $u(0.8)$, usando o método de Runge-Kutta de ordem quatro:

$$k_1 = f(t_i, u_i),\ k_2 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_1),\ k_3 = f(t_i + \frac{h}{2}, u_i + \frac{h}{2}k_2),\ k_4 = f(t_i + h, u_i + hk_3),$$

$$u_{i+1} = u_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

4. Mostre que, quando o segundo membro f não depende de u, o método de Runge-Kutta de quarta ordem se reduz à aplicação da regra de Simpson.

5. Mostre que cada um dos seguintes métodos de Runge-Kutta tem ordem quatro:

(a) Gauss: $\begin{array}{c|cc} (3-\sqrt{3})/6 & 1/4 & (3-2\sqrt{3})/12 \\ (3+\sqrt{3})/6 & (3+2\sqrt{3})/12 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$; (b) Lobatto IIIB: $\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$.

Estabilidade linear

6. Mostre que o método de Runge-Kutta de quarta ordem aplicado à equação diferencial $u' = \lambda u$ pode ser escrito na forma $u_{i+1} = \left(1 + h\lambda + \frac{1}{2}(h\lambda)^2 + \frac{1}{6}(h\lambda)^3 + \frac{1}{24}(h\lambda)^4\right) u_i$.

7. Determine as regiões de estabilidade absoluta do métodos de Euler, Euler regressivo e trapézios.

8. Determine a função de estabilidade para os métodos dos trapézios e ponto médio implícito.

9. Mostre que os métodos dos trapézios e Euler regressivo são estáveis A.

10. Mostre que, qualquer que seja o método de Runge-Kutta explícito de três etapas de ordem três a sua função de estabilidade é dada por $R(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!}$.

11. Determine, pelo método da sondagem as regiões de estabilidade absoluta para os métodos ERK de s etapas e de ordem s, com $s = 1, 2, 3, 4$.

12. Considere o seguinte método de Runge-Kutta semi-implícito:

$$k_1 = f(u_i + \beta h k_1), \quad k_2 = f(u_i + hk_1 + \beta h k_2); \qquad u_{i+1} = u_i + h\left((0.5 + \beta)k_1 + (0.5 - \beta)k_2\right).$$

   (a) Determine a ordem p do método e mostre que é independente de β.
   (b) Obtenha a função de estabilidade do método e determine β por forma a que o método seja estável A.

Métodos com passo variável

13. Considere o problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & t^2+u, \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$ Determine a medida do passo que nos garanta um resultado com quatro casas decimais correctas (comece com $h=0.05$) quando se usa na integração numérica: (a) o método de Euler; (b) o método dos trapézios.

14. Use o método de Runge-Kutta-Fehlberg $RKF45$

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55

para aproximar a solução de $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & \sin t + e^{-t}, \\ u(0) & = & 0, \end{array}\right.$ em $t=1$, com erro inferior a 10^{-4}. Use $hmax = 0.25$.

Métodos lineares de passo múltiplo

15. Deduza, usando o polinómio interpolador de Lagrange, as expressões dos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de 2 passos.

16. Prove que, a partir do polinómio interpolador de Hermite se pode obter o método de passo múltiplo $u_{i+2}+4u_{i+1}-5u_i = h\,(4f_{i+1}+2f_i)$. Diga, justificando, se se trata de um método convergente.

17. Deduza as expressões dos métodos de Nyström de k passos, com $k=0,1,2,3$.

18. Considere o problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & 2u, \\ u(0) & = & 1. \end{array}\right.$ Determine um valor aproximado para $u(1)$ usando o método do ponto médio – $u_{i+2}=u_i+2hf_{i+1}$ –, com $h=0.25$.

19. Use o método
    (a) $u_{i+4} = u_i + \frac{4h}{3}(2f_{i+3}-f_{i+2}+2f_{i+1})$, [Milne];
    (b) $u_{i+2} = u_{i+1} + \frac{h}{2}(3f_{i+1}-f_i)$, [Adams-Bashforth de 2 passos].

    para determinar a solução de $u' = \sin t + e^{-t}$, em $t=1$, com $u(0)=0$ e $h=0.1$.

20. Determine a ordem para os seguintes métodos lineares de passo múltiplo:
    (a) $u_{i+2}-u_i = \frac{h}{3}(f_{i+2}+4f_{i+1}+f_i)$, [Simpson];
    (b) $u_{i+2}-u_{i+1} = \frac{h}{12}(5f_{i+2}+8f_{i+1}-f_i)$ [Adams-Moulton de 2 passos].

21. Determine a ordem e a constante erro para os métodos:
    (a) $u_{i+2}-(1-\alpha)u_{i+1}+\alpha u_i = h((1+\beta)f_{i+2}-(\alpha+\beta+\alpha\beta)f_{i+1}+\alpha\beta f_i)$, $\alpha \neq 0$;
    (b) $u_{i+4}-\frac{8}{19}(u_{i+3}-u_{i+1}) = \frac{6h}{19}(f_{i+4}+4f_{i+3}+4f_{i+1}+f_i)$ [Quade].

22. Deduza um método linear de passo múltiplo com dois passos, explícito, e com ordem máxima.

23. Construa uma família de métodos lineares de dois passo, com um parâmetro livre, implícita, de ordem máxima e determine a sua constante erro. Para que valores do parâmetro o método converge?