Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica II

Ano de 1998/99 | Folha 5

Sistemas de equações diferenciais

1. Mostre que cada um dos seguintes métodos de Runge-Kutta tem ordem quatro:

(a) Gauss: $\begin{array}{c|cc} (3-\sqrt{3})/6 & 1/4 & (3-2\sqrt{3})/12 \\ (3+\sqrt{3})/6 & (3+2\sqrt{3})/12 & 1/4 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$; (b) Lobatto IIIB: $\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$.

2. Converta em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem os seguintes problemas:

(a) $y''-3y'+2y=0,\ y(0)=y'(0)=1;$ (b) $y'''-\dfrac{1-y^2}{10}y'+y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=y''(0)=0.$

3. Considere a equação diferencial $y''+4xy'+2y^2=0$ com condições iniciais $y(0)=1$ e $y'(0)=0$. Com $h=0.1$, utilize os métodos de Runge-Kutta de ordem 2 e de Euler para obter aproximações para $y(0.5)$ e $y'(0.5)$.

4. Transforme a equação diferencial $y'''+xy''-yy'+y^2=\cos x$ num sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Escreva as fórmulas que permitem aplicar o método de Adams-Bashforth de segunda ordem a este sistema.

Métodos lineares de passo múltiplo

5. Deduza, usando o polinómio interpolador de Lagrange, as expressões dos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton de 2 passos.

6. Prove que, a partir do polinómio interpolador de Hermite se pode obter o método de passo múltiplo $y_{n+2}+4y_{n+1}-5y_n=h\,(4f_{n+1}+2f_n)$. Diga, justificando, se se trata de um método convergente.

7. Deduza as expressões dos métodos de Nyström de k passos, com $k=0,1,2,3$.

8. Considere o problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & 2y, \\ y(0) & = & 1. \end{array}\right.$ Determine um valor aproximado para $y(1)$ usando o método do ponto médio – $y_{n+2}=y_n+2hf_{n+1}$ –, com $h=0.25$.

9. Use o método

   (a) $y_{n+4}=y_n+\frac{4h}{3}(2f_{n+3}-f_{n+2}+2f_{n+1}),$ [Milne];

   (b) $y_{n+2}=y_{n+1}+\frac{h}{2}(3f_{n+1}-f_n),$ [Adams-Bashforth de 2 passos].

   para determinar a solução de $y'=\sin x+e^{-x}$, em $x=1$, com $y(0)=0$ e $h=0.1$.

10. Determine a ordem para os seguintes métodos lineares de passo múltiplo:

   (a) $y_{n+2}-y_n=\frac{h}{3}(f_{n+2}+4f_{n+1}+f_n),$ [Simpson];

   (b) $y_{n+2}-y_{n+1}=\frac{h}{12}(5f_{n+2}+8f_{n+1}-f_n)$ [Adams-Moulton de 2 passos].

11. Determine a ordem e a constante erro para os métodos:

   (a) $y_{n+2}-(1-\alpha)y_{n+1}+\alpha y_n=h((1+beta)f_{n+2}-(\alpha+\beta+\alpha\beta)f_{n+1}+\alpha\beta f_n),\quad \alpha\neq 0;$

   (b) $y_{n+4}-\frac{8}{19}(y_{n+3}-y_{n+1})=\frac{6h}{19}(f_{n+4}+4f_{n+3}+4f_{n+1}+f_n)$ [Quade].

12. Deduza um método linear de passo múltiplo com dois passos, explícito, e com ordem máxima.

13. Construa uma família de métodos lineares de dois passo, com um parâmetro livre, implícita, de ordem máxima e determine a sua constante erro. Para que valores do parâmetro o método converge?

Métodos preditores-correctores

14. Use o método preditor-corrector do tipo Adams de primeira ordem (que usa o método de Euler progressivo como preditor e o método de Euler regressivo como corrector) para calcular a solução de $\begin{cases} y' &= y+t^2, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$ em $t=2$ com $h=0.1$.

15. Repita o exercício anterior usando o método preditor-corrector do tipo Adams de quarta ordem,

$$\text{Preditor:} \qquad y_{n+4} = y_{n+3} + \frac{h}{24}(55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n);$$

$$\text{Corrector:} \qquad y_{n+3} = y_{n+2} + \frac{h}{24}(9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n),$$

sabendo que $y(0)=1.000000$, $y(0.1)=1.105513$, $y(0.2)=1.224208$ e $y(0.3)=1.359576$.

16. Considere o método preditor-corrector de Milne (que usa o método de Milne como preditor e o de Simpson como corrector). Mostre que o erro da fórmula correctora pode ser dado em termos da diferença entre os valores do preditor e do corrector.

17. Use o método preditor-corrector de Milne para aproximar a solução do problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= -(y+1)(y+3), \\ y(0) &= -2, \end{cases}$ em $x=2$, com $h=0.2$. Determine uma estimativa para a parte principal do erro local.

18. Mostre que o método preditor-corrector que usa o método de Euler como preditor e o método dos trapézios como corrector no modo $PECE$ é equivalente ao método de Heun. Determine o método de Runge-Kutta de três etapas que é equivalente ao mesmo método preditor-corrector no modo $P(EC)^2E$.

Métodos com passo variável

19. Resolva o problema de condição inicial $\begin{cases} y' &= x^2+y, \\ y(0) &= 1, \end{cases}$ em $x=0.5$, usando o método de Euler como preditor e o método dos trapézios como corrector. Determine a medida do passo que nos garanta um resultado com quatro casas decimais correctas (comece com $h=0.05$).

20. Use o método de Runge-Kutta-Fehlberg $RKF45$

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
	25/216	0	1408/2565	2197/4104	-1/5	0
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55

para aproximar a solução de $\begin{cases} y' &= \sin x + e^{-x}, \\ y(0) &= 0, \end{cases}$ em $x=1$, com erro inferior a 10^{-4}. Use $hmax = 0.25$.

21. Diga como poderia obter um algoritmo de passo variável usando:

    (a) a estimativa do erro obtida no exercício 16;

    (b) o processo de extrapolação.