Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Análise Numérica II

Ano de 2002/2003 Folha 6

Métodos lineares de passo múltiplo: continuação

1. Considere o método linear de passo múltiplo $u_{i+3}+\frac{3}{2}u_{i+2}-3u_{i+1}+\frac{1}{2}u_i=3hf(t_{i+1},u_{i+1})$. Determine o seu erro de truncatura local e comente sobre a sua consistência, estabilidade zero e convergência.

2. Mostre que o método $u_{i+2}-u_{i+1}=\frac{h}{3}(3f(t_{i+1},u_{i+1})-2f(t_i,u_i))$ é inconsistente. Mostre o efeito da inconsistência quando se usa o método na integração numérica do problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & 4t\sqrt{u}, \\ u(0) & = & 1, \end{array}\right.$ em $t=2$, sabendo que a sulução exacta é $u(t)=(1+t^2)^2$.

3. Considere o método $u_{i+2}-(1-a)u_{i+1}+au_i=\frac{h}{2}\left((3-a)f(t_{i+1},u_{i+1})-(1-a)f(t_i,u_i)\right)$. Ilustre o efeito da estabilidade zero quando se usa o método com (i) $a=0$, (ii) $a=-5$, no cálculo numérico da solução do problema de condição inicial dado no exercício anterior.

4. Verifique se os seguintes métodos lineares de passo múltiplo são convergentes:

   (a) $u_{i+2}+4u_{i+1}-5u_i=h\left(4f(t_{i+1},u_{i+1})+2f(t_i,u_i)\right)$;

   (b) $u_{i+2}-u_{i+1}=\frac{h}{12}\left(5f(t_{i+2},u_{i+2})+8f(t_{i+1},u_{i+1})-f(t_i,u_i)\right)$, [Adams-Moulton de 2 passos].

Estabilidade linear

5. Resolva os seguintes problemas de condição inicial *stiff* usando os métodos de Euler, Runge-Kutta de quarta ordem, preditor-corrector de Adams de quarta ordem e trapézios, comparando os resultados obtidos com a solução exacta: (a) $u'=-9u$, $0\le t\le 1$, $u(0)=e$, com $h=0.1$; (b) $u'=-20u+20\sin t+\cos t$, $0\le t\le 2$, $u(0)=1$, com $h=0.25$.

6. Considere o método $u_{i+2}-u_i=\frac{h}{2}(f_{i+1}+3f_i)$. Usando o critério de Schur, determine o seu intervalo de estabilidade absoluta.

7. Mostre, usando o critério de Schur, que os intervalos de estabilidade absoluta dos métodos de Adams-Bashforth e Adams-Moulton, de k passos, $u_{i+m}-u_{i+m-1}=h\sum_{j=0}^{m}\beta_j f_{i+j}$, com $m=1,2,3,4$, são da forma $(L,0)$, de acordo com as seguintes tabelas:

	Adams-Bashforth								Adams-Moulton							
m	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0	p	C_{p+1}	L	β_4	β_3	β_2	β_1	β_0	p	C_{p+1}	L
1				0	1	1	$\frac{1}{2}$	-2				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{12}$	$-\infty$
2			0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2	$\frac{5}{12}$	-1			$\frac{5}{12}$	$\frac{8}{12}$	$-\frac{1}{12}$	3	$-\frac{1}{24}$	-6
3		0	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$	3	$\frac{3}{8}$	-0.5454		$\frac{9}{24}$	$\frac{19}{24}$	$-\frac{5}{24}$	$\frac{1}{24}$	4	$-\frac{19}{720}$	-3
4	0	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$	4	$\frac{251}{720}$	-0.3	$\frac{251}{720}$	$\frac{646}{720}$	$-\frac{264}{720}$	$\frac{106}{720}$	$-\frac{19}{720}$	5	$-\frac{3}{160}$	-1.8347

Métodos preditores-correctores

8. Use o método preditor-corrector do tipo Adams de primeira ordem (que usa o método de Euler progressivo como preditor e o método de Euler regressivo como corrector) para calcular a solução de $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & u+t^2, \\ u(0) & = & 1, \end{array}\right.$ em $t=2$ com $h=0.1$.

9. Repita o exercício anterior usando o método preditor-corrector do tipo Adams de quarta ordem,

$$\text{Preditor:} \qquad u_{i+4} = u_{i+3} + \tfrac{h}{24}(55f_{i+3} - 59f_{i+2} + 37f_{i+1} - 9f_i);$$

$$\text{Corrector:} \qquad u_{i+3} = u_{i+2} + \tfrac{h}{24}(9f_{i+3} + 19f_{i+2} - 5f_{i+1} + f_i),$$

sabendo que $u(0) = 1.000000$, $u(0.1) = 1.105513$, $u(0.2) = 1.224208$ e $u(0.3) = 1.359576$.

10. Considere o método preditor-corrector de Milne (que usa o método de Milne como preditor e o de Simpson como corrector). Mostre que o erro da fórmula correctora pode ser dado em termos da diferença entre os valores do preditor e do corrector.

11. Use o método preditor-corrector de Milne para aproximar a solução do problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & -(u+1)(u+3), \\ u(0) & = & -2, \end{array}\right.$ em $t = 2$, com $h = 0.2$. Determine uma estimativa para a parte principal do erro local e diga como poderia obter um algoritmo de passo variável usando essa estimativa.

12. Mostre que o método preditor-corrector que usa o método de Euler como preditor e o método dos trapézios como corrector no modo $PECE$ é equivalente ao método de Heun. Determine o método de Runge-Kutta de três etapas que é equivalente ao mesmo método preditor-corrector no modo $P(EC)^2E$.

13. Resolva o problema de condição inicial $\left\{\begin{array}{rcl} u' & = & t^2 + u, \\ u(0) & = & 1, \end{array}\right.$ em $t = 0.5$, usando o método de Euler como preditor e o método dos trapézios como corrector. Determine a medida do passo que nos garanta um resultado com quatro casas decimais correctas (comece com $h = 0.05$).

Sistemas de equações diferenciais

14. Converta em sistemas de equações diferenciais de primeira ordem os seguintes problemas:

(a) $u'' - 3u' + 2u = 0, \ u(0) = u'(0) = 1;$ (b) $u''' - \dfrac{1-u^2}{10}u' + u = 0, \ u(0) = 1, \ u'(0) = u''(0) = 0.$

15. Considere a equação diferencial $u'' + 4tu' + 2u^2 = 0$ com condições iniciais $u(0) = 1$ e $u'(0) = 0$. Com $h = 0.1$, utilize os métodos de Runge-Kutta de ordem 2 e de Euler para obter aproximações para $u(0.5)$ e $u'(0.5)$.

16. Transforme a equação diferencial $u''' + tu'' - uu' + u^2 = \cos t$ num sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Escreva as fórmulas que permitem aplicar o método de Adams-Bashforth de segunda ordem a este sistema.

17. Qual o maior valor da medida do passo a usar na integração numérica do sistema $u' = Au$, com $u(0) = [1, 0, -1]^T$, pelo método de Euler, onde $A = \begin{bmatrix} -21 & 19 & -20 \\ 19 & -21 & 20 \\ 40 & -40 & -40 \end{bmatrix}$.

Nota: Os valores próprios de A são $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -40 + 40i$ e $\lambda_3 = -40 - 40i$

18. Resolva o seguinte sistema *stiff* usando os métodos de Euler regressivo e Runge-Kutta de quarta ordem, com (a) $h = 0.1$ e (b) $h = 0.025$.

$$u_1' = 32u_1 + 66u_2 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}, \quad u_2' = -66u_1 - 133u_2 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}, \qquad u_1(0) = u_2(0) = \frac{1}{3}, \qquad 0 \leq t \leq 0.5.$$

Compare os resultados obtidos com a solução exacta,

$$u_1(t) = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-100t}, \qquad u_2(t) = -\frac{1}{3}t - \frac{1}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{-100t}.$$

19. Determine uma aproximação para a solução da equação diferencial $u'' + 200u' + 102u = 0$, com $u(0) = 1$, $u'(0) = -2$, em $t = 1$, usando os métodos de Heun e dos trapézios, com $h = 0.1$. Compare os resultados sabendo que a solução exacta é $u(t) = e^{-t}$.