Problemas de condições de fronteira

Existência e unicidade de solução

1. Prove que o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} u'' + e^{-xy} + \sin u' = 0, \quad x \in (1,2), \\ u(1) = 0, \quad u(2) = 0, \end{cases}$$

tem solução única.

2. Prove que se $u(x)$ é solução de $\begin{cases} u'' = p(x)u' + q(x)u, \quad x \in (a,b), \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0, \end{cases}$ então $u = 0$.

Alguns métodos clássicos

3. Proponha funções teste e tentativa para o problema

$$-u'' + u = x, \qquad x \in (0,1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

e obtenha a solução pelo método da colocação usando nós de colocação equidistantes e $n = 2$.

4. Resolva, de novo, o exercício 3 empregando o método dos mínimos quadrados.

5. Resolva o exercício 3 recorrendo, desta vez, ao método de Galerkin.

6. Usando o método de Galerkin, determine a solução aproximada para o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} u'' + \dfrac{\pi^2}{4} u = \dfrac{\pi^2}{16} \cos\left(\dfrac{\pi}{4} x\right), \quad x \in (0,1), \\ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

usando $x_0 = 0$, $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.7$, $x_3 = 1$ e compare os resultados com a solução exacta

$$u(x) = -\frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) - \frac{\sqrt{2}}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{4} x\right).$$

7. Usando o método de Galerkin, determine a solução aproximada para o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}(xu') + 4u = 4x^2 - 8x + 1, \quad x \in (0,1), \\ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 0, \end{cases}$$

usando $x_0 = 0$, $x_1 = 0.4$, $x_2 = 0.8$, $x_3 = 1$ e compare os resultados com a solução exacta $u(x) = x^2 - x$.

Formulação fraca (caso simétrico)

8. Refazer o exercício 3 usando a formulação fraca simétrica.

9. (a) Obtenha a formulação fraca simétrica do problema

$$\begin{cases} (a_2u'')'' - (a_1u')' + a_0u = f, \quad x \in (0,1), \\ \\ u(0) = u''(0) = 0, \quad u'(1) = u'''(1) = 0. \end{cases}$$

   (b) Quais as condições de fronteira essenciais e naturais deste problema?

10. Recorrendo à formulação fraca simétrica para o problema

$$-u'' + (1+x)u = 0, \qquad \Omega = (0,1), \qquad u(0) = u'(1) = 0,$$

obtenha a solução aproximada de $u_2 \in \mathcal{P}_2(\Omega)$. Compare $u'(1)$ e $u_2'(1)$.

Método de diferenças finitas

11. Prove que, se $x_{i-1} - x_i = h > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, então
   (a) $f'(x_i) = \frac{1}{h}\left[f(x_i) - f(x_{i+1})\right] - \frac{h}{2}f''(\xi)$,
   (b) $f'(x_i) = \frac{1}{h}\left[f(x_i - 1) - f(x_i)\right] + \frac{h}{2}f''(\xi)$,
   (c) $f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[-3f(x_i) + 4f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})\right] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$,
   (d) $f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[-f(x_{i-1}) + f(x_{i+1})\right] - \frac{h^2}{6}f'''(\xi)$,
   (e) $f'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-1}) + 3f(x_i)\right] + \frac{h^2}{3}f'''(\xi)$,
   (f) $f''(x_i) = \frac{1}{h^2}[f(x_{i-1}) - 2f(x_i) + f(x_{i+1})] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi)$,
   (g) $f''(x_i) = \frac{1}{12h^2}[-f(x_{i-2}) + 16f(x_{i-1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i+1}) - f(x_{i+2})] + \frac{h^4}{90}f^{(4)}(\xi)$,

   sendo ξ um ponto pertencente ao intervalo aberto definido pelos pontos usados em cada uma das fórmulas de diferenças finitas.

12. Determine uma solução para o problema

$$\begin{cases} u'' = -u', \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 1, \end{cases}$$

em $x_i = 0.25i$, $i = 1, 2, 3$, usando um método de diferenças finitas.

13. Determine uma solução aproximada para o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} u'' = u' - u + e^x, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = e, \end{cases}$$

em $x_i = 0.25i$, $i = 1, 2, 3$, usando o método das diferenças finitas.

14. Determine uma solução aproximada para o problema de condições de fronteira

$$\begin{cases} u'' = 100u, \quad x \in (0,1), \\ u(0) = 1, \quad u(1) = e^{-10}, \end{cases}$$

usando o método das diferenças finitas com $h = 0.1$ e $h = 0.05$.

15. A equação de Van der Pol

$$u'' - \mu(u^2 - 1)u' + u = 0, \quad \mu > 0,$$

é um modelo para o fluxo de corrente num tudo de vácuo com três elementos internos. Seja $\mu = 0.5$, $u(0) = 0$ e $u(2) = 1$. Aproxime a solução $u(t)$ para $t = 0.2i$, com $i = 1, \ldots, 9$, usando o método das diferenças finitas.