Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Tratamento Matemático das Observações (Eng. Geográfica)

27 de Junho de 2001 — Duração: 3h00

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

Parte I

1. Considere o intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e uma função f conhecida nos nós da partição uniforme, de espaçamento h,

$$\Delta: \qquad a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Sejam

$$x_{-i} = a - ih, \quad x_{n+i} = b + ih, \qquad i = 1, 2, 3,$$

e B_i, $i = -1, 0, \ldots, n, n+1$, os splines cúbicos dados, para $x \in [x_{-3}, x_{n+3}]$, por

$$B_i(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{nos restantes casos.} \end{cases}$$

Mostre que

x	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}
$B_i(x)$	0	1	4	1	0
$B_i''(x)$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0

.

2. A estrela S da Ursa Maior apresenta uma variação para a sua magnitude aparente m, em função do ângulo de fase θ (em graus), de acordo com os dados da seguinte tabela:

θ	-60	-20	20
m	9.40	11.39	10.84

.

Usando um *spline* cúbico livre ($s''(a) = s''(b) = 0$), determine uma aproximação para o ângulo de fase pertencente ao intervalo $[-20, 20]$ em que a magnitude aparente da estrela é máxima.

Formulário

$$s_i(x) = \frac{1}{h^3}\Big[C_{i-2}(x_i - x)^3 + C_{i-1}[h^3 + 3h^2(x_i - x) + 3h(x_i - x)^2 - 3(x_i - x)^3]$$
$$+ C_i[h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3] + C_{i+1}(x - x_{i-1})^3\Big], \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Parte II

1. Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$G: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & y \end{array}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que:

(a) a esperança de Y é dada por $E(Y) \approx G(E(X))$;

(b) a covariância de Y é dada por

$$\sigma_Y^2 \approx a_1^2\sigma_{X_1}^2 + 2a_1a_2\sigma_{X_1X_2} + a_2^2\sigma_{X_2}^2,$$

com $a_i = \frac{\partial G}{\partial X_i}(E(X))$.

2. Para a estrela de Rigel (β da constelação de Orionte) efectuaram-se as seguintes observações relativas à sua magniude aparente m e à sua distância à Terra r (em parsec):

magniude aparente m	2.00	2.01	2.09	1.99	1.97
distância à Terra r	279.0	279.5	278.9	278.8	279.1

Supondo que as observações são todas independentes, determine:

(a) a magnitude absoluta M de Rigel sabendo que

$$2.512^{(M-m)} = \left(\frac{10}{r}\right)^2;$$

(b) uma estimativa para o erro com que vem afectado o valor determinado na alínea anterior.

Parte III

1. Sejam l_i, $i = 1, 2, 3, 4$, valores observados para quatro quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$\hat{l} + B\Delta = d$$

em que B é uma matriz real do tipo 4×1, $\Delta \in \mathbb{R}$, $d = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$ e , $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3, \hat{l}_4]^T$, as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha:

(a) um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$;

(b) matriz cofactor de Δ.

2. A lei de Hooke estabelece que a força F aplicada a uma mola é directamente proporcional ao deslocamento provocado de acordo com a seguinte relação

$$F = k(e - e_0),$$

onde k é a constante da mola, e o comprimento da mola quando sujeita à força F e e_0 o comprimento inicial da mola.

No sentido de determinar a constante da mola usaram-se diferentes forças (conhecidas) tendo sido observados os comprimentos resultantes, dados na seguinte tabela

força F (em gramas)	3	5	8	10
comprimento e (em milímetros)	13.3	16.3	19.4	20.9

Sabendo que o comprimento inicial da mola é $e_0 = 10\ mm$ e considerando as medições (não correlacionadas) com precisão inversamente proporcional ao comprimento observado, determine a melhor estimativa para a constante da mola, usando o algoritmo dos mínimos quadrados obtido na alínea anterior.