Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Tratamento Matemático das Observações (Eng. Geográfica)

17 de Junho de 2002 Duração: 3h00

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

Parte I

1. Seja f uma função definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e suponha que f e a sua derivada f' são conhecidas nos pontos da partição $\Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b$.

   (a) Mostre que o polinómio de Hermite

$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\ &+ \cdots + f[x_0, x_0, x_1, x_1, \ldots, x_n, x_n](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \cdots (x - x_{n-1})^2(x - x_n) \end{aligned}$$

   é o único polinómio de grau menor ou igual a $2n + 1$ interpolador de f e f' nos pontos de Δ.

   (b) Considerando a partição Δ apenas com dois pontos (i.e. $n = 1$), e $f \in C^4[a, b]$, mostre que

$$\|f - H_3\|_\infty \leq \frac{(b - a)^4}{384} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Formulário
$\|f - H_{2n+1}\|_\infty \leq \max_{x\in[a,b]} \left(\prod_{i=0}^{n} (x - x_i)^2 \right) \frac{\|f^{(2n+2)}\|_\infty}{(2n + 2)!}.$

2. Pretende-se interpolar a função f definida por $f(x) = \ln x$, com $x \in [2, 2.5]$, por um *spline* cúbico completo s numa malha uniforme.

   (a) Calcule o número mínimo de pontos a usar para garantir que $\|f - s\|_\infty \leq 0.5 \times 10^{-4}$.

Formulário
$\|f - s\|_\infty \leq \frac{5h^4}{384} \|f^{(4)}\|_\infty, \qquad h = x_i - x_{i-1}.$

   (b) Determine uma aproximação para $f(2.3)$ usando o *spline* cúbico completo interpolador de f nos pontos obtidos na alínea anterior.

Formulário
$s_i(x) = \frac{1}{h^3} \Big[C_{i-2}(x_i - x)^3 + C_{i-1}[h^3 + 3h^2(x_i - x) + 3h(x_i - x)^2 - 3(x_i - x)^3]$
$+ C_i[h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3] + C_{i+1}(x - x_{i-1})^3 \Big], \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$

Parte II

1. Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$\begin{array}{rccc} G: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1, x_2) & \mapsto & y \end{array}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que:

   (a) a esperança de Y é dada por $E(Y) \approx G(E(X))$;

   (b) a covariância de Y é dada por $\sigma_Y^2 \approx J_G C_X J_G^T$, onde C_X representa a matriz de covariância do vector X e

$$J_G = \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial G}{\partial x_1}(E(X)), & \dfrac{\partial G}{\partial x_2}(E(X)) \end{array} \right].$$

2. Pretende-se efectuar o revestimento lateral de um reservatório cilíndrico de raio r e altura h. Nesse sentido, efectuaram-se várias medições, todas nas mesmas condições, da sua altura h e do raio da base r, tendo-se obtido os seguintes resultados (em metros):

altura h	5.11	5.01	5.15	5.25	5.08
raio da base r	2.67	2.65	2.64	2.60	2.61

   (a) Determine a área esperada da superfície lateral do reservatório;

   (b) Obtenha uma estimativa para o erro com que vem afectado o valor determinado na alínea anterior supondo que a altura h e o raio da base r são não correlacionados.

Parte III

1. Sejam l_i, $i = 1, 2, 3$, valores observados para três quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma $A\hat{l} + B\Delta = d$, em que A é uma matriz real do tipo 2×3, B e d vectores de $\mathbb{R}^2$, $\Delta \in \mathbb{R}$ e $\hat{l} = [l_1, l_2, l_3]^T$ as observações ajustadas.

   Utilizando o princípo dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$;

2. Para determinar área de um terreno rectangular, fizeram-se as seguintes medições:

largura l	comprimento c	diagonal d
50.2 m	100.7 m	112.4 m

   Determine o valor ajustado da área considerando que as medições são independentes e a precisão é inversamente proporcional à distância medida.