

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

PARTE I

1. Seja f uma função definida num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ e suponha que f e a sua derivada f' são conhecidas nos pontos da partição $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

- (a) Mostre que o polinómio de Hermite

$$H_{2n+1}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) + \dots + f[x_0, x_0, x_1, x_1, \dots, x_n](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_{n-1})^2(x - x_n)$$

é o único polinómio de grau menor ou igual a $2n + 1$ interpolador de f e f' nos pontos de Δ .

- (b) Considerando a partição Δ apenas com dois pontos (i.e. $n = 1$), e $f \in C^4[a, b]$, mostre que

$$\|f - H_3\|_\infty \leq \frac{(b-a)^4}{384} \|f^{(4)}\|_\infty.$$

Formulário $\ f - H_{2n+1}\ _\infty \leq \max_{x \in [a, b]} \left(\prod_{i=0}^n (x - x_i)^2 \right) \frac{\ f^{(2n+2)}\ _\infty}{(2n+2)!}.$
--

2. Pretende-se interpolar a função f definida por $f(x) = \ln x$, com $x \in [2, 2.5]$, por um *spline* cúbico completo s numa malha uniforme.

- (a) Calcule o número mínimo de pontos a usar para garantir que $\|f - s\|_\infty \leq 0.5 \times 10^{-4}$.

Formulário $\ f - s\ _\infty \leq \frac{5h^4}{384} \ f^{(4)}\ _\infty, \quad h = x_i - x_{i-1}.$

- (b) Determine uma aproximação para $f(2.3)$ usando o *spline* cúbico completo interpolador de f nos pontos obtidos na alínea anterior.

Formulário $s_i(x) = \frac{1}{h^3} [C_{i-2}(x_i - x)^3 + C_{i-1}[h^3 + 3h^2(x_i - x) + 3h(x_i - x)^2 - 3(x_i - x)^3] + C_i[h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3] + C_{i+1}(x - x_{i-1})^3], \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$

PARTE II

1. Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \mapsto & y \end{array}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que:

- (a) a esperança de Y é dada por $E(Y) \approx G(E(X))$;
 (b) a covariância de Y é dada por $\sigma_Y^2 \approx J_G C_X J_G^T$, onde C_X representa a matriz de covariância do vector X e

$$J_G = \left[\frac{\partial G}{\partial x_1}(E(X)), \quad \frac{\partial G}{\partial x_2}(E(X)) \right].$$

2. Pretende-se efectuar o revestimento lateral de um reservatório cilíndrico de raio r e altura h . Nesse sentido, efectuaram-se várias medições, todas nas mesmas condições, da sua altura h e do raio da base r , tendo-se obtido os seguintes resultados (em metros):

altura h	5.11	5.01	5.15	5.25	5.08
raio da base r	2.67	2.65	2.64	2.60	2.61

- (a) Determine a área esperada da superfície lateral do reservatório;
 (b) Obtenha uma estimativa para o erro com que vem afectado o valor determinado na alínea anterior supondo que a altura h e o raio da base r são não correlacionados.

PARTE III

1. Sejam l_i , $i = 1, 2, 3, 4$, valores observados para quatro quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma $Al = d$ em que A é uma matriz real do tipo 2×4 , $l = [l_1, l_2, l_3, l_4]^T$ e $d = [d_1, d_2]^T$.

- (a) Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$;
 (b) Mostre que a matriz cofactor de $\hat{l}$ é dada por

$$Q_{\hat{l}} = Q - Q_v$$

onde Q é a matriz cofactor de l e $Q_v = QA^T W_c A Q$, com $W_c = (AQA^T)^{-1}$.

Sugestão: Mostre que $Q_{\hat{l}} = Q - 2Q_v + Q_v W Q_v$ e, posteriormente, que $Q_v W Q_v = Q_v$, sendo W a matriz peso de l .

2. Para determinar o perímetro do triângulo rectângulo dado na Figura 1, mediram-se, independentemente, o ângulo a e os lados L_i , $i = 1, 2, 3$, e obtiveram-se os seguintes valores:

	L_1	L_2	L_3	a
Valor	2.8 m	4.1 m	5.0 m	$34^\circ 15' 0''$
Peso	1	1	1	2

Determine:

- (a) os valores ajustados das observações efectuadas;
 (b) a matriz cofactor das observações ajustadas;
 (c) uma estimativa para a variância de referência.

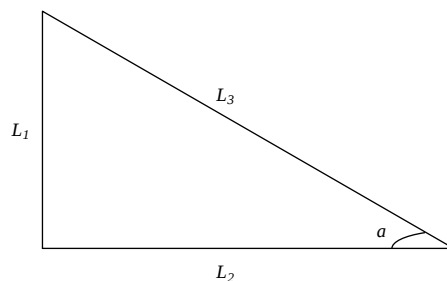


Figure 1: Triângulo rectângulo