

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

1. (a) Considere a curva de Ferguson-Coons que passa pelos pontos $P_0 = (x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ com declives nesses pontos especificados pelos pontos de guia $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$, respectivamente, e pelo parâmetro de normalização λ . Mostre que a curva se pode escrever na forma

$$\begin{aligned} x(t) &= \phi_0(t)x_0 + \phi_1(t)x_1 + \phi_2(t)x_2 + \phi_3(t)x_3, \\ y(t) &= \phi_0(t)y_0 + \phi_1(t)y_1 + \phi_2(t)y_2 + \phi_3(t)y_3, \end{aligned}$$

onde as funções ϕ_i , $i = 0, 1, 2, 3$, são tais que $\sum_{i=0}^3 \phi_i(x) = 1$.

- (b) Escolhendo os convenientes pontos de guia, aproxime a curva $y = \sin x$, no intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, usando uma curva de Bézier.
2. (a) Seja $X = (X_1, X_2)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com

$$\begin{aligned} G: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) &\mapsto y \end{aligned}$$

uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Mostre que:

- i. a esperança de Y é dada por $E(Y) \approx G(E(X))$;
 ii. a covariância de Y é dada por $\sigma_Y^2 \approx J_G C_X J_G^T$, onde C_X representa a matriz de covariância do vector X e

$$J_G = \left[\frac{\partial G}{\partial x_1}(E(X)), \quad \frac{\partial G}{\partial x_2}(E(X)) \right].$$

- (b) Para a execução de uma carta usou-se a seguinte projecção cartográfica (ϕ e λ em radianos; x e y em quilómetros):

$$\begin{cases} x &= (\cos \phi_0)\lambda, \\ y &= (\cos \phi_0) \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right), \end{cases}$$

sendo (ϕ, λ) as coordenadas geográficas – latitude e longitude – e ϕ_0 a latitude do paralelo central. Para um paralelo central a 40° , fizeram-se as seguintes determinações (considerando-se independentes), com um receptor GPS, para um mesmo vértice geodésico:

ϕ	40° 11' 52".57	40° 11' 52".54	40° 11' 52".54	40° 11' 52".61
λ	-8° 26' 37".11	-8° 26' 36".99	-8° 26' 37".20	-8° 26' 37".15

Determine as coordenadas rectangulares x e y mais prováveis para esse vértice e os respectivos desvios padrão.

3. (a) Sejam l_i , $i = 1, 2, 3$, valores observados para três quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma $A\hat{l} + B\Delta = d$, em que A é uma matriz real do tipo 2×3 , B e d vectores de $\mathbb{R}^2$, $\Delta \in \mathbb{R}$ e $\hat{l} = [l_1, l_2, l_3]^T$ as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$.

- (b) Para determinar área de um terreno rectangular, fizeram-se as seguintes medições:

largura l	comprimento c	diagonal d
50.2 m	100.7 m	112.4 m

Determine o valor ajustado da área considerando que as medições são independentes e a precisão é inversamente proporcional à distância medida.