Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra

Exame de Recurso de Tratamento Matemático das Observações (Eng. Geográfica)

23 de Julho de 2001 — Duração: 3h00

Observação: A resolução completa de cada exercício inclui a justificação do raciocínio utilizado e a apresentação dos cálculos efectuados.

Parte I

1. Seja f uma função definida num intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ e suponha que f e a sua derivada f' são conhecidas nos pontos da partição
$$\Delta : a = x_0 < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b.$$
Mostre que o polinómio de Hermite
$$\begin{aligned} H_{2n+1}(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f[x_0,x_0,x_1](x-x_0)^2 + f[x_0,x_0,x_1,x_1](x-x_0)^2(x-x_1) \\ &\quad + \cdots + f[x_0,x_0,x_1,x_1,\ldots,x_n,x_n](x-x_0)^2(x-x_1)^2\cdots(x-x_{n-1})^2(x-x_n) \end{aligned}$$
é o único polinómio de grau menor ou igual a $2n+1$ interpolador de f e f' nos pontos de Δ.

2. Determine o polinómio de grau mínimo que faça a concordância entre a parábola
$$y = -x^2, \qquad \text{no ponto} \quad (0,0),$$
e a recta
$$y = 1, \qquad \text{no ponto} \quad (3,1).$$
Nota: Duas curvas dizem-se concordantes de tiverem a mesma tangente no ponto de união.

Parte II

1. Seja $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ um vector aleatório de esperança $E(X)$ e Y a variável aleatória dada por $Y = G(X)$, com
$$\begin{array}{cccc} G: & \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \mapsto & y \end{array}$$
uma função não linear com derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Supondo que as variáveis aleatórias X_i, $i = 1, ..., 4$, são não correlacionadas, mostre que:

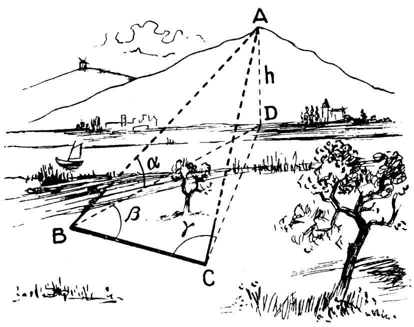
   (a) a esperança de Y é dada por
   $$E(Y) \approx G(E(X));$$

   (b) a covariância de Y é dada por
   $$\sigma_Y^2 \approx a_1^2\sigma_{X_1}^2 + a_2^2\sigma_{X_2}^2 + a_3^2\sigma_{X_3}^2 + a_4^2\sigma_{X_4}^2,$$
   com
   $$a_i = \frac{\partial G}{\partial X_i}(E(X)), \qquad i = 1, ..., 4.$$

(v.s.f.f.)

2. Para determinar a diferença de nível h entre os pontos A e B (ver figura), efectuaram-se as seguintes observações do comprimento $\overline{BC}$ (em metros) e dos ângulos α, β e γ (em graus)

$\overline{BC}$	100.0	100.1	100.1	100.3	100.2
α	25.1	25.1	25.0	25.0	24.9
β	58.5	58.3	58.3	58.4	58.3
γ	74.3	74.5	74.4	74.3	74.4



Supondo que as observações são não correlacionadas, determine:

(a) a diferença de nível pretendida sabendo que

$$h = \overline{BD} \tan \alpha;$$

com

$$\overline{BD} = \frac{\overline{BC} \sin \gamma}{\sin(180 - \beta - \gamma)}.$$

(b) uma estimativa para o erro com que vem afectado o valor determinado na alínea anterior.

Parte III

1. Sejam l_i, $i = 1, 2, 3$, valores observados para três quantidades que são funcionalmente independentes. Pretende-se que tais valores verifiquem um sistema de equações lineares da forma

$$\hat{l} + B\Delta = d,$$

em que B é uma matriz real do tipo 3×1, $\Delta \in \mathbb{R}$, $d = [d_1, d_2, d_3]^T$ e $\hat{l} = [\hat{l}_1, \hat{l}_2, \hat{l}_3]^T$ as observações ajustadas.

Utilizando o princípio dos mínimos quadrados e supondo que a matriz peso das observações é diagonal, obtenha:

(a) um processo de cálculo para a determinação do vector dos valores ajustados $\hat{l}$;

(b) matriz cofactor de Δ.

2. Suponhamos que l_1, l_2 e l_3 são três observações independentes de uma distância Δ. Se as observações tiverem pesos w_1, w_2 e w_3, respectivamente, mostre que a melhor estimativa para a distância pretendida, segundo o critério dos mínimos quadrados, é igual à média pesada das observações, i.e.,

$$\Delta = \frac{w_1 l_1 + w_2 l_2 + w_3 l_3}{w_1 + w_2 + w_3}.$$